Leonhard Euler

vollständige

Anleitung

zur

Algebra.

Zweyter Theil

von den

verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen.

Mit Röm. Kayserl. und Churfürstl. Sächß. allergnädigsten Privilegiis.

St. Petersburg 1771.

bey der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften.

Inhalt des zweyten Theils.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Cap. 1. Von der Auflösung der Aufgaben überhaupt. S. 3
Cap. 2. Von den Gleichungen des ersten Grades und ihrer Auflösung. S. 8
Cap. 3. Auflösung einiger hieher gehörigen Fragen. S. 13
Cap. 4. Von Auflösung zweyer und mehr Gleichungen vom ersten Grade. S. 26
Cap. 5. Von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen. S. 40
Cap. 6. Von der Auflösung der vermischten quadratischen Gleichungen. S. 48
Cap. 7. Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckichten Zahlen. S. 60
Cap. 8. Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Binomien. S. 67
Cap. 9. Von der Natur der quadratischen Gleichungen. S. 79
Cap. 10. Von der Auflösung der reinen cubischen Gleichungen. S. 87
Cap. 11. Von der Auflösung der vollständigen cubischen Gleichungen. S. 93
Cap. 12. Von der Regel des Cardani oder des Scipionis Ferrei. S. 106
Cap. 13. Von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch biquadratische Gleichungen genennet werden. S. 115
Cap. 14. Von des Pombelli Regel die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf cubische zu bringen. S. 124
Cap. 15. von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen. S. 130
Cap. 16. Von der Auflösung der Gleichungen durch die Näherung. S. 138

Zweyter

Inhalt des zweyten Theils.

Zweyter Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytic.

Cap. 1. Von der Auflösung der einfachen Gleichungen, worinnen mehr als eine unbekannte Zahl vorkömmt. S. 153

Cap. 2. Von der sogenannten Regulacöci, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehr unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen. S. 171

Cap. 3. Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkömmt. S. 178

Cap. 4. Von der Art diese irrationale Formeln $\sqrt{}(a+bx+cxx)$ rational zu machen. S. 183

Cap. 5. Von den Fällen, da die Formel $a+bx+cxx$ niemals ein Quadrat werden kann. S. 202

Cap. 6. Von den Fällen in ganzen Zahlen, da die Formel $axx+b$ ein Quadrat wird. S. 213

Cap. 7. Von einer besondern Methode die Formel $ann+1$ zu einem Quadrat in ganzen Zahlen zu machen. S. 226

Cap. 8. Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt{}(a+bx+cxx+dx^3)$ rational zu machen. S. 239

Cap. 9. Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt{}(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)$ rational zu machen. S. 250

Cap. 10. Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt[3]{}(a+bx+cxx+dx^3)$ rational zu machen. S. 264

Cap. 11. Von der Auflösung dieser Formel $axx+bxy+cyy$ in Factoren. S. 275

Cap. 12. Von der Verwandelung dieser Formel $axx+cyy$ in Quadraten, oder auch höheren Potestäten. S. 288

Cap. 13. Von einigen Formeln dieser Art, ax^4+by^4, welche sich nicht zu einem Quadrat machen lassen. S. 302

Cap. 14. Auflösung einiger Fragen, die zu diesem Theile der Analytic gehören. S. 315

Cap. 15. Auflösung solcher Fragen, worzu Cubi erfordert werden. S. 366

Des

Des

Zweyten Theils

Erster Abschnitt

Von

den Algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Des

Zweyten Theils

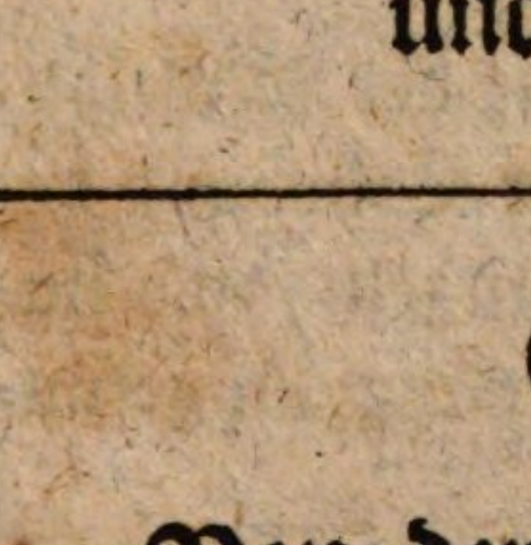
Erster Abschnitt

Von den Algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Capitel I.

Von der Auflösung der Aufgaben überhaupt.

I.



Die Hauptabsicht der Algebra so wie aller Theile der Mathematik ist dahin gerichtet, daß man den Werth solcher Größen, die bisher unbekannt gewesen bestimmen möge, welches aus genauer Erwegung der Bedingungen, welche dabey vorgeschrieben und durch bekannte Größen ausgedrückt werden, geschehen muß. Daher die Algebra auch also beschrieben wird, daß darinnen gezeigt werde, wie man aus bekannten Größen unbekannte ausfindig machen könne.

2.

Dieses stimmt auch mit allem demjenigen überein, was bisher vorgetragen worden, indem allenthalben aus bekannten Größen andere heraus gebracht worden sind, so vorher als unbekannt angesehen werden konnten.

Das erste Beyspiel findet man so gleich in der Addition, da von zwey oder mehr gegebenen Zahlen die Summe gefunden worden. Daselbst wurde nämlich eine Zahl gesucht welche den gegebenen zusammen genommen gleich ist.

Bey der Subtraction wurde eine Zahl gesucht, welche dem Unterscheid zweyer gegebenen Zahlen gleich war.

Und eben so verhält es sich auch mit der Multiplication und Division, wie auch mit der Erhebung der Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln, wo immer eine vorher unbekannte Zahl aus bekannten gefunden wird.

3.

In dem letzten Abschnitt haben wir schon verschiedene Fragen aufgelöset, wobey es immer auf die Erfindung einer Zahl angekommen, welche aus andern gegebenen Zahlen unter gewissen Bedingungen geschlossen werden mußte.

Alle Fragen laufen also da hinaus, daß aus einigen gegebenen Zahlen eine neue gefunden werden soll, welche mit jenen in einer gewissen Verbindung stehe, und diese Verbindung wird durch gewisse Bedingungen oder Eigenschaften, welche der gesuchten Zahl zukommen müssen, bestimmt.

4.

Bey einer jeden vorkommenden Frage wird nun diejenige Zahl die gesucht werden soll, durch einen der

letztern

leßtern Buchstaben des Alphabets angedeutet, und dabey alle vorgeschriebene Bedingungen in Erwegung gezogen, wodurch man auf eine Vergleichung zwischen zweyen Zahlen geführet wird. Aus einer solchen Gleichung muß hernach der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Frage aufgelöset wird. Bisweilen müssen auch mehrere Zahlen gesucht werden, welches auf gleiche Weise durch Gleichungen geschehen muß.

5.

Dieses wird durch ein Exempel deutlicher werden: man stelle sich diese Frage vor:

20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirthshause: ein Mann verzehrt 8 Gl. ein Weib aber 7 Gl. und die ganze Zeche beläuft sich auf 6 Rthlr. Nun ist die Frage wie viel Männer und Weiber daselbst gewesen?

Um diese Frage aufzulösen, so setze man die Zahl der Männer = x, und sehe dieselbe als bekannt an, oder man verfahre damit als wann man die Probe machen wollte, ob dadurch der Frage ein Genüge geschähe. Da nun die Anzahl der Männer = x ist und Männer und Weiber zusammen 20 Person ausmachen so kann man daraus die Anzahl der Weiber bestimmen, welche gefunden wird wann man die Zahl der Männer von 20 subtrahirt. Also war die Zahl der Weiber = $20 - x$.

Da nun ein Mann 8 Gl. verzehrt, so werden diese x Männer verzehren $8x$ Gl.

Und weil ein Weib 7 Gl. verzehrt so werden diese $20-x$ Weiber verzehren $140 - 7x$ Gl.

Also verzehren Männer und Weiber zusammen $140 + x$ Gl. Wir wissen aber wie viel sie verzehrt haben, nämlich 6 Rthl. welche zu Gl. gemacht 144 Gl. sind, daher erhalten wir diese Gleichung $140 + x = 144$ woraus man leicht sieht daß $x = 4$.

Daher waren bey der Zeche 4 Männer und 16 Weiber.

6.

Eine andere Frage von gleicher Art:

20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirthshause. Die Männer verzehren 24 Fl. die Weiber verzehren auch 24 Fl. und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als ein Weib hat zahlen müssen, wie viel waren es Männer und Weiber?

Es sey die Zahl der Männer $= x$.

so ist die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun diese x Männer 24 Fl. verzehrt haben, so hat ein Mann verzehrt $\frac{24}{x}$ Fl.

Und weil die $20 - x$ Weiber auch 24 Fl. verzehret haben, so hat ein Weib verzehrt $\frac{24}{20-x}$. Diese Zeche eines Weibes ist nun um 1 weniger, als die Zeche eines Mannes. Wann man also von der Zeche eines Mannes 1 Fl. subtrahirt, so muß die Zeche eines Weibes heraus kommen; woraus man diese Gleichung erhält $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$. Dieses ist also die Gleichung woraus der Werth von x gesucht werden muß, welcher nicht so leicht heraus gebracht werden kann wie bey der vorigen Frage. Aus dem folgenden aber wird man sehen daß $x = 8$ sey, welches auch der gefundenen Gleichung ein Genüge leistet $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ das ist $2 = 2$.

7.

Bey allen Fragen kommt es nun darauf an, daß nachdem man die unbekannten oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben angedeutet, die Umstände der Frage

genau

genau in Erwegung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach besteht die ganze Kunst darinn wie solche Gleichungen aufgelöset, und daraus der Werth der unbekannten Zahlen gefunden werden soll, und hievon soll in diesem Abschnitt gehandelt werden.

8.

Bey den Fragen selbst ereignet sich auch ein Unterscheid, in dem bey einigen nur eine unbekannte Zahl, bey andern aber zwey oder noch mehr gesucht werden sollen, in welchem letztern Fall zu merken, daß dazu auch eben so viel besondere Gleichungen erfodert werden, welche aus den Umständen der Frage selbst hergeleitet werden müssen.

9.

Eine Gleichung bestehet demnach aus zwey Sätzen, deren einer dem andern gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekannten Zahl heraus zu bringen, müssen öfters sehr viele Verwandelungen angestellet werden, welche sich aber alle darauf gründen, daß wann zwey Größen einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, wenn man zu beyden einerley Größen addirt oder davon subtrahirt: imgleichen auch wann dieselben durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden: ferner auch wann beyde zugleich zu Potestäten erhoben oder aus beyden gleichnahmigte Wurzeln ausgezogen, und endlich auch wenn von beyden die Logarithmen genommen werden, wie schon allbereit im vorigen Abschnitt geschehen.

10.

Diejenigen Gleichungen, wo von der unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkommt, nach dem die Gleichung in Ordnung gebracht worden, sind am leichtesten aufzulösen, und werden Gleichungen vom ersten

Grade genennet. Hernach folgen solche Gleichungen, worinnen die zweyte Potestät oder das Quadrat der unbekannten Zahl vorkommt, diese werden Quadratische Gleichungen, oder vom zweyten Grade genennt. Darauf folgen die Gleichungen vom dritten Grade oder die Cubischen worinnen der Cubus der unbekannten Zahl vorkommt, und so fort, von welchen allen in diesem Abschnitte gehandelt werden soll.

Capitel 2.

Von den Gleichungen des ersten Grads und ihrer Auflösung.

11.

Wann die unbekannte oder gesuchte Zahl durch den Buchstaben x angedeutet wird, und die heraus gebrachte Gleichung schon so beschaffen ist, daß der eine Satz bloß allein das x und der andere Satz eine bekannte Zahl enthält, als z. E. $x=25$, so hat man schon wirklich den Werth von x der verlangt wird, und auf diese Form muß man immer zu kommen trachten, so verwirrt auch die erst gefundene Gleichung seyn mag, worzu die Regeln im folgenden gegeben werden sollen.

12.

Wir wollen bey den leichtesten Fällen anfangen, und erstlich setzen, man sey auf diese Gleichung gekommen:

$x+9=16$, so sieht man daß $x=7$.

Es sey aber auf eine allgemeine Art $x+a=b$, wo a und b bekannte Zahlen andeuten, dieselben mögen heißen wie sie wollen. Hier muß man also beyderseits

a sub-

a subtrahiren, und da bekommt man diese Gleichung $x = b - a$ welche uns den Werth von x anzeigt.

13.

Wenn die gefundene Gleichung ist $x - a = b$, so addire man beyderseits a, so kommt $x = a + b$, welches der gesuchte Werth von x ist.

Eben so verfährt man, wenn die erste Gleichung also beschaffen ist $x - a = aa + 1$, denn da wird $x = aa + a + 1$.

Und aus dieser Gleichung $x - 8a = 20 - 6a$ bekommt man $x = 20 - 6a + 8a$ oder $x = 20 + 2a$.

Und aus dieser $x + 6a = 20 + 3a$ findet man $x = 20 + 3a - 6a$ oder $x = 20 - 3a$.

14.

Ist nun die Gleichung also beschaffen $x - a + b = c$, so kann man beyderseits a addiren, so kommt $x + b = c + a$, jetzt subtrahire man beyderseits b, so hat man $x = c + a - b$; man kann aber zugleich beyderseits $+ a - b$ addiren, so bekommt man mit einmal $x = c + a - b$.

Also in den folgenden Exempeln;

wann $x - 2a + 3b = 0$ so wird $x = 2a - 3b$,

wenn $x - 3a + 2b = 25 + a + 2b$, so wird $x = 25 + 4a$.

wenn $x - 9 + 6a = 25 + 2a$, so wird $x = 34 - 4a$.

15.

Hat die gefundene Gleichung diese Gestalt $ax = b$, so dividire man beyderseits durch a so hat man $x = \frac{b}{a}$.

Ist aber die Gleichung $ax + b - c = d$, so muß man erstlich dasjenige was bey ax steht wegbringen, man addire beyderseits $- b + c$ so kommt $ax = d - b + c$:

folglich, $x = \frac{d - b + c}{a}$

oder man subtrahire beyderseits + b − c so kommt

$ax = d - b + c$ und $x = \frac{d-b+c}{a}$.

Es sey $2x + 5 = 17$, so kommt $2x = 12$ und $x = 6$
Es sey $3x - 8 = 7$, so kommt $3x = 15$ und $x = 5$
Es sey $4x - 5 - 3a = 15 + 9a$, so wird $4x = 20 + 12a$, folglich $x = 5 + 3a$.

16.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{x}{a} = b$, so multiplicire man beyderseits mit a, so kommt $x = ab$,

Ist nun $\frac{x}{a} + b - c = d$, so wird erstlich $\frac{x}{a} = d - b + c$ und $x = (d - b + c)\,a = ad - ab + ac$.
Es sey $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, so wird $\frac{1}{2}x = 7$ und $x = 14$.
Es sey $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a$, so wird $\frac{1}{3}x = 4 - a$ und $x = 12 - 3a$.

Es sey $\frac{x}{a-1} - 1 = a$ so wird $\frac{x}{a-1} = a + 1$ und $x = aa - 1$.

17.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{ax}{b} = c$, so multiplicire man beyderseits mit b, so wird $ax = bc$, und ferner $x = \frac{bc}{a}$.

ist aber $\frac{ax}{b} - c = d$, so wird $\frac{ax}{b} = d + c$ und $ax = bd + bc$ und folglich $x = \frac{bd+bc}{a}$.

Es sey $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, so wird $\frac{2}{3}x = 5$ und $2x = 15$ folglich $x = 7\frac{1}{2}$, das ist $7\frac{1}{2}$

Es

Es sey $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, also $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2}$ welches $= \frac{9}{2}$ und $3x = 18$ und $x = 6$.

18.

Es kann auch geschehen, daß zwey oder mehr Glieder den Buchstaben x enthalten, und entweder in einen Satz oder in beyden vorkommen. Sind sie auf einer Seite als $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, so wird $x + \frac{1}{2}x = 6$ und $3x = 12$ und $x = 4$.

Es sey $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$, was ist x? man multiplicire mit 3 so wird $4x + \frac{2}{3}x = 132$, ferner mit 2 multiplicirt wird $11x = 264$ und $x = 24$; diese drey Glieder können aber so gleich in eins gezogen werden, als $\frac{11}{6}x = 44$, man theile beyderseits durch 11 so hat man $\frac{1}{6}x = 4$ und $x = 24$.

Es sey $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 1$ welches zusammen gezogen giebt $\frac{5}{12}x = 1$ und $x = 2\frac{2}{5}$.

Es sey $ax - bx + cx = d$, so ist dieses eben so viel als $(a - b + c)x = d$, hieraus kommt $x = \frac{d}{a - b + c}$.

19.

Steht aber x in beyden Sätzen, als z. E. $3x + 2 = x + 10$ so müssen die x von der Seite wo man am wenigsten hat weggebracht werden, also subtrahire man hier beyderseits x so kommt $2x + 2 = 10$ und $2x = 8$ und $x = 4$.

Es sey ferner $x + 4 = 20 - x$, also $2x + 4 = 20$ und $2x = 16$ und $x = 8$.

Es sey $x + 8 = 32 - 3x$, also $4x + 8 = 32$ und $4x = 24$ und $x = 6$.

Es sey ferner $15 - x = 20 - 2x$, also $15 + x = 20$ und $x = 5$.

Es sey $1 + x = 5 - \frac{1}{2}x$, also $1 + \frac{3}{2}x = 5$ und $\frac{3}{2}x = 4$ und $3x = 8$ und $x = 2\frac{2}{3}$.

Es sey $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x$, man addire $\frac{1}{3}x$, so kommt $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}x$, subtrahire $\frac{1}{3}$, so hat man $\frac{1}{12}x = \frac{1}{6}$, multiplicire mit 12 so kommt $x = 2$.

Es sey $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$, addire $\frac{2}{3}x$ so kommt $1\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{6}x$, subtrahire $\frac{1}{4}$ so hat man $\frac{7}{6}x = 1\frac{1}{4}$.
multiplicire mit 6 so bekommt man $7x = 7\frac{1}{2}$.
durch 7 dividirt, giebt $x = 1\frac{1}{14}$ oder $x = \frac{15}{14}$.

20.

Kommt man auf eine solche Gleichung wo die unbekannte Zahl x sich im Nenner befindet, so muß der Bruch gehoben und die ganze Gleichung mit demselben Nenner multiplicirt werden.

Also wenn man findet $\frac{100}{x} - 8 = 12$.

addire 8, so kommt $\frac{100}{x} = 20$,

multiplicire mit x, so hat man $100 = 20x$.
dividire durch 20, so kommt $x = 5$.

Es sey ferner $\frac{5x + 3}{x - 1} = 7$,

multiplicire mit $x - 1$, so hat man $5x + 3 = 7x - 7$.
subtrahire $5x$, so kommt $3 = 2x - 7$,
addire 7, so bekommt man $2x = 10$, folglich $x = 5$.

21.

Bisweilen kommen auch Wurzelzeichen vor, und die Gleichung gehört doch zu dem ersten Grad; als wenn eine solche Zahl x gesucht wird unter 100, so daß die Quadratwurzel aus $100 - x$ gleich werde 8, oder daß $\sqrt{(100 - x)} = 8$, so nehme man beyderseits die Quadraten $100 - x = 64$, so hat man wenn x addirt wird $100 = 64 + x$ subtrahire 64, so hat man $x = 36$: oder man könnte auch also verfahren, da $100 - x = 64$, so

subtra-

subtrahire man 100, und man bekommt $-x = -36$; mit -1 multiplicirt, giebt $x = 36$.

22.

Bisweilen kommt auch die unbekannte Zahl x in den Exponenten, dergleichen Exempel schon oben vorgekommen, und da muß man seine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen.

Als wenn man findet $2^x = 512$, so nimmt man beyderseits ihre Logarithmen, da hat man $x \, l\, 2 = l\, 512$; man dividire durch $l\, 2$ so wird $x = \frac{l\, 512}{l\, 2}$: nach den Tabellen ist also:

$$x = \frac{2,7092700}{0,3010300} = \frac{27092700}{3010300}; \text{ also } x = 9.$$

Es sey 5. $3^{2x} - 100 = 305$; man addire 100, kommt also $5.\, 3^{2x} = 405$; man dividire durch 5, so wird $3^{2x} = 81$; man nehme die Logarithmen $2x\, l\, 3 = l\, 81$ und dividire durch $2\, l\, 3$ so wird $x = \frac{l\, 81}{2 l\, 3}$ oder $x = \frac{l\, 81}{l\, 9}$, folglich $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} = \frac{19084850}{9542425}$; also wird $x = 2$.

Capitel 3.

Von der Auflösung einiger hieher gehörigen Fragen.

23.

Erste Frage:

Zertheile 7 in zwey Theile, so daß der größere um 3 größer sey als der kleinere?

Es

Es sey der größere Theil = x so wird der kleinere seyn $7-x$, dahero muß seyn $x = 7-x+3$ oder $x = 10-x$; man addire x so kommt $2x = 10$ und dividire durch 2 so wird $x = 5$.

Antwort: der größere Theil ist 5 und der kleinere 2.

II. Frage: man zertheile a, in zwey Theile, so daß der größere um b größer sey als der kleinere?

Es sey der größere Theil x, so ist der kleinere $a-x$: dahero wird $x = a-x+b$, man addire x so wird $2x = a+b$ und dividire durch 2, so erhält man $x = \frac{a+b}{2}$.

Eine andere Auflösung: Es sey der größere Theil = x, weil nun derselbe um b größer ist als der kleinere, so ist hinwiederum der kleinere um b kleiner als der größere; dahero wird der kleinere Theil $x-b$: diese beyde Theile zusammen müssen a ausmachen, dahero bekommt man: $2x-b = a$; man addire b, so kommt $2x = a+b$, folglich $x = \frac{a+b}{2}$ welches der größere Theil ist, und der kleinere wird seyn $\frac{a+b}{2} - b$ oder $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$ oder $\frac{a-b}{2}$.

24.

III. Frage: Ein Vater hinterläßt drey Söhne und 1600 Rthl. Nach seinem Testamente soll der älteste Sohn 200 Rthl. mehr haben als der zweyte, der zweyte aber 100 Rthl. mehr als der dritte; wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des dritten sey = x, so ist das Erbtheil des zweyten = x + 100, und das Erbtheil des ersten = x + 300; diese 3 zusammen müssen 1600 Rthl. machen. Dahero wird $3x + 400 = 1600$: man subtrahi-

trahire 400, so wird 3x = 1200 und durch 3 dividirt giebt x = 400.

Antwort: der dritte bekommt 400 Rthl. der zweyte 500 Rthl. der erste 700 Rthl.

25.

IV. Frage: Ein Vater hinterläßt 4 Söhne und 8600 Rthl. Nach seinem Testamente soll der erste zweymal so viel bekommen als der zweyte weniger 100 Rthl. Der zweyte soll bekommen dreymal so viel als der dritte weniger 200 Rthl. und der dritte soll haben viermal so viel als der vierte weniger 300 Rthl. Wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des vierten sey = x, so ist das Erbtheil des dritten 4x − 300, des zweyten 12x − 1100 und des ersten 24x − 2300. Hiervon muß die Summe ausmachen 8600 Rthl. woraus diese Gleichung entsteht:

41x − 3700 = 8600: man addire 3700, so kommt 41x = 12300; und durch 41 dividirt giebt x = 300.

Antwort: der vierte Sohn bekommt 300 Rthl. der dritte 900 Rthl. der zweyte 2500 Rthl. und der erste 4600 Rthl.

26.

V. Frage: Ein Mann hinterläßt 11000 Rthl. und darzu eine Witwe zwey Söhne und drey Töchter. Nach seinem Testamente soll die Frau zweymal mehr bekommen als ein Sohn, und ein Sohn zweymal mehr als eine Tochter. Wie viel bekommt ein jedes?

Das Erbtheil einer Tochter sey = x so ist das Erbtheil eines Sohnes = 2x und das Erbtheil der Witwe = 4x; folglich ist die ganze Erbschaft 3x + 4x + 4x, oder 11x = 11000; durch 11 getheilt giebt x = 1000.

Antwort: eine Tochter bekommt 1000 Rthl.
also alle drey bekommen 3000 Rthl.

ein

ein Sohn bekommt 2000 Rthl.

also beyde 4000

und die Mutter bekommt = = = 4000

Summa 11000 Rthl.

27.

VI. Frage: Ein Vater hinterläßt drey Söhne, welche das hinterlassene Vermögen folgender Gestalt unter sich theilen. Der erste bekommt 1000 Rthl. weniger als die Hälfte von der ganzen Verlassenschaft; der zweyte 800 Rthl. weniger als der dritte Theil der Verlassenschaft, und der dritte 600 Rthl. weniger als der vierte Theil der Verlassenschaft. Nun ist die Frage: wie groß die Verlassenschaft gewesen, und wie viel ein jeder bekommen?

Es sey die ganze Verlassenschaft = x

so hat der erste Sohn bekommen $\frac{1}{2}x - 1000$

der zweyte $\frac{1}{3}x - 800$

der dritte $\frac{1}{4}x - 600$

Alle drey Söhne zusammen haben also bekommen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, welches der ganzen Verlassenschaft x gleich gesetzt werden muß, woraus diese Gleichung entsteht, $\frac{1}{1}\frac{3}{2}x - 2400 = x$

Man subtrahire x, so hat man $\frac{1}{1}\frac{1}{2}x - 2400 = 0$,

man addire 2400, so ist $\frac{1}{1}\frac{1}{2}x = 2400$,

und mit 12, multiplicirt giebt $x = 28800$.

Antwort: die ganze Verlassenschaft war 28800 Rthl.

davon hat nun der

erste Sohn bekommen 13400 Rthl.

der zweyte 8800

der dritte 6600

alle drey also 28800 Rthl.

28.

VII. Frage: Ein Vater hinterläßt vier Söhne; welche die Erbschaft also unter sich theilen: der erste nimmt 3000 Rthl. weniger als die Hälfte der Erbschaft:
der zweyte nimmt 1000 Rthl. weniger als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft:
der dritte nimmt just den $\frac{1}{4}$ der ganzen Erbschaft:
der vierte nimmt 600 Rthl. und den $\frac{1}{5}$ der Erbschaft:
wie groß war die Erbschaft und wie viel hat ein jeder Sohn bekommen?

Man setze die ganze Erbschaft $= x$
so hat bekommen der erste $\frac{1}{2}x - 3000$
der zweyte $\frac{1}{3}x - 1000$
der dritte $\frac{1}{4}x$
der vierte $\frac{1}{5}x + 600$
und alle vier zusammen nahmen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, welches seyn muß $= x$: also hat man diese Gleichung.
$\frac{77}{60}x - 3400 = x$
subtrahire x, so wird $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$
addire 3400 so kommt $\frac{17}{60}x = 3400$
durch 17 dividirt giebt $\frac{1}{60}x = 200$ und
mit 60 multiplicirt $x = 12000$.

Antwort: die ganze Verlassenschaft war 12000 Rthl.
davon bekam der erste 3000 Rthl.
der zweyte 3000
der dritte 3000
der vierte 3000

29.

VIII. Frage: Suche eine Zahl wenn ich darzu ihre Hälfte addire, daß so viel über 60 kommen, als die Zahl selbst ist unter 65?

Die Zahl sey x, so muß $x + \frac{1}{2}x - 60$ so viel seyn als $65 - x$
das ist $\frac{3}{2}x - 60 = 65 - x$
man addire x so hat man $\frac{5}{2}x - 60 = 65$
man addire 60 so kommt $\frac{5}{2}x = 125$
durch 5 dividirt wird $\frac{1}{2}x = 25$ und
mit 2 multiplicirt giebt $x = 50$
Antwort: die gesuchte Zahl ist 50.

30.

IX. Frage: Man zertheile 32 in zwey Theile, wenn ich den kleinern dividire durch 6, den größern aber durch 5, daß die Quotienten zusammen 6 ausmachen.

Es sey der kleinere Theil = x so ist der größere $= 32 - x$; der kleinere durch 6 dividirt giebt $\frac{x}{6}$; der größere durch 5 dividirt giebt $\frac{32-x}{5}$: also muß seyn $\frac{x}{6} + \frac{32-x}{5} = 6$
mit 5 multiplicirt giebt $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$, oder $-\frac{1}{6}x + 32 = 30$,
man addire $\frac{1}{6}x$ so kommt $32 = 30 + \frac{1}{6}x$
30 subtrahirt giebt $2 = \frac{1}{6}x$
mit 6 multiplicirt wird $x = 12$
Antwort: der kleinere Theil ist 12, und der größere 20.

31.

X. Frage: Suche eine Zahl, wenn ich sie mit 5 multiplicire so ist das Product so viel unter 40, als die Zahl selbst ist unter 12.

Es sey diese Zahl = x, welche unter 12 ist um $12 - x$, die Zahl fünfmal genommen ist 5x und ist unter 40 um $40 - 5x$, welches eben so viel seyn soll als $12 - x$

also $40 - 5x = 12 - x$
addire $5x$ so wird $40 = 12 + 4x$,
12 subtrahirt giebt $28 = 4x$
durch 4 dividirt wird $x = 7$
Antwort: die Zahl ist 7.

32.

XI. Frage: Zertheile 25 in zwey Theile, so daß der größere 49 mal größer ist, als der kleinere?

Es sey der kleinere Theil $= x$ so ist der größere $= 25 - x$; dieser durch jenen dividirt soll 49 geben, also wird $\frac{25-x}{x} = 49$
mit x multiplicirt giebt $25 - x = 49x$
und x addirt kommt $50x = 25$
durch 50 dividirt bleibt $x = \frac{1}{2}$.
Antwort: der kleinere Theil ist $\frac{1}{2}$ und der größere $24\frac{1}{2}$, welcher durch $\frac{1}{2}$ dividirt, das ist mit 2 multiplicirt giebt 49.

33.

XII. Frage: Zertheile 48 in neun Theile, so daß immer einer um $\frac{1}{2}$ größer sey, als der vorhergehende?

Es sey der erste und kleinste Theil $= x$ so ist der zweyte $x + 1$ und der dritte $= x + 1\frac{1}{2}$ &c. Weil nun diese Theile eine Arithmetische Progression ausmachen, davon das erste Glied $= x$ so ist das neunte und letzte Glied $x + 4$, wozu das erste x addirt $2x + 4$ giebt. Diese Summe mit der Anzahl der Glieder 9, multiplicirt giebt $18x + 36$; dieses durch 2 getheilt giebt die Summe aller neun Theile $9x + 18$, so da seyn muß 48. Also hat man $9x + 18 = 48$
18 subtrahirt giebt $9x = 30$
durch 9 dividirt giebt $x = 3\frac{1}{3}$.

Antwort: der erste Theil ist $3\frac{1}{3}$ und die neun Theile sind folgende

1 2 3 4 5 6 7 8 9
$3\frac{1}{3} + 3\frac{5}{6} + 4\frac{1}{3} + 4\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3} + 5\frac{5}{6} + 6\frac{1}{3} + 6\frac{5}{6} + 7\frac{1}{3}$,
davon die Summe = 48.

34.

XIII. Frage: Suche eine Arithmetische Progression davon das erste Glied = 5 und das letzte = 10 die Summe aber = 60 sey?

Da hier weder der Unterschied noch die Anzahl der Glieder bekannt ist, aus dem ersten und letzten aber die Summe aller gefunden werden könnte, wenn man nur die Anzahl der Glieder wüßte, so sey dieselbe = x, so wird die Summe der Progression seyn $\frac{1}{2}^5$ x = 60; durch 15 dividirt $\frac{1}{2}$ x = 4, mit 2 multiplicirt x = 8. Da nun die Anzahl der Glieder 8 ist, so setze man den Unterschied = z, so ist das zweyte Glied 5 + z, das dritte 5 + 2 z und das achte 5 + 7 z, welches gleich seyn muß 10.

Also hat man 5 + 7 z = 10
und 5 subtrahirt, giebt 7 z = 5
durch 7 dividirt z = $\frac{5}{7}$

Antwort: Der Unterschied der Progression ist $\frac{5}{7}$ und die Anzahl der Glieder 8, dahero die Progression selbst seyn wird,

1 2 3 4 5 6 7 8
$5 + 5\frac{5}{7} + 6\frac{3}{7} + 7\frac{1}{7} + 7\frac{6}{7} + 8\frac{4}{7} + 9\frac{2}{7} + 10$
davon die Summe = 60.

35.

XIV. Frage: Suche eine Zahl wenn ich von ihrem Duplo subtrahire 1 und das übrige duplire, davon 2 subtrahire den Rest durch 4 dividire, daß 1 weniger heraus komme als die gesuchte Zahl?

Die

Die gesuchte Zahl sey x, so ist ihr Duplum 2 x, davon 1 subtrahirt bleibt 2 x − 1, dieses duplirt wird 4x − 2, davon subtrahirt 2 bleibt 4x − 4 dieses durch 4 dividirt giebt x − 1, welches 1 weniger seyn muß als x:

Also x − 1 = x − 1, dieses ist eine Identische Gleichung, und zeiget an, daß x gar nicht bestimmt werde, sondern daß man davor eine jegliche Zahl nach Belieben annehmen könne.

36.

XV. Frage: Ich habe gekauft etliche Ellen Tuch und für jede 5 Ellen gegeben 7 Rthl. Ich habe wieder verkauft je 7 Ellen für 11 Rthl. und gewonnen 100 Rthl. über das Hauptguth: wie viel ist des Tuchs gewesen?

Es seyn gewesen x Ellen: man muß also erst sehen wie viel diese im Einkauf gekostet, welches durch folgende Regeldetri gefunden wird:

5 Ellen kosten 7 Rthl., was kosten x Ellen; Antwort: $\frac{7}{5}$ x Rthl.

so viel Geld hat er ausgegeben. Nun laßt uns sehen, wie viel er wieder eingenommen, dieses geschieht durch diese Regeldetri: 7 Ellen kosten im Verkauf 11 Rthl. was kosten x Ellen, Antwort: $\frac{11}{7}$ x Rthl.

dieses ist die Einnahme, welche um 100 Rthl. grösser ist als die Ausgabe, woraus diese Gleichung entspringt:

$\frac{11}{7}$ x = $\frac{7}{5}$ x + 100

$\frac{7}{5}$ x subtrahirt, bleibt $\frac{6}{35}$ x = 100

mit 35 multiplicirt, kommt 6 x = 3500

durch 6 dividirt wird x = $583\frac{1}{3}$.

Antwort: Es waren $583\frac{1}{3}$ Ellen, welche erstlich eingekauft worden für $816\frac{2}{3}$ Rthl. hernach sind dieselben wieder verkauft worden für $916\frac{2}{3}$ Rthl. also ist darauf gewonnen worden 100 Rthl.

37.

XVI. Frage: Einer kauft 12 Stück Tuch für 140 Rthl. davon sind 2 weiße, 3 schwarze, und 7 blaue:

Kostet ein Stück schwarzes Tuch 2 Rthl. mehr als ein weißes, und ein blaues 3 Rthl. mehr als ein schwarzes: ist die Frage wie viel jedes gekostet?

Man setze, ein weißes Stück kostet x Rthl. dahero kosten die zwey weiße Stücke 2x Rthl. Weiter kostet ein schwarzes Stück $x + 2$ also die drey schwarzen $3x + 6$ und ein blaues Stück $x + 5$ folglich die 7 blauen $7x + 35$

und alle zwölf Stück $12x + 41$

dieselben kosten aber wirklich 140 Rthl.

dahero hat man $12x + 41 = 140$

41 subtrahirt bleibt $12x = 99$

durch 12 dividirt wird $x = 8\frac{1}{4}$

Antwort: ein weißes Stück kostet demnach $8\frac{1}{4}$ Rthl.
ein schwarzes = = = = $10\frac{1}{4}$ Rthl.
ein blaues = = = = = $13\frac{1}{4}$ Rthl.

38.

Frage: Einer hat Muscatennüsse gekauft, und sagt daß 3 Stück eben so viel über 4 Pf. kosten, als 4 Stück mehr kosten als 10 Pf. wie theuer waren dieselben?

Man sage 3 Stücke kosten $x + 4$ Pf. so werden 4 Stücke kosten $x + 10$ Pf. Nun aber nach dem ersten Satz findet man durch die Regeldetri was 4 Stück kosten,

3 Stück: $x + 4$ Pf. = 4 Stück: Antwort $\frac{4x + 16}{3}$

also wird $\frac{4x+16}{3} = x + 10$ oder $4x + 16 = 3x + 30$

$3x$ subtrahirt giebt $x + 16 = 30$

16 subtrahirt giebt $x = 14$

Antwort: Es kosten 3 Stück 18 Pf. und 4 Stück 24 Pf. folglich 1 Stück hat gekost 6 Pf.

39.

XVIII. Frage: Einer hat zwey silberne Becher nebst einem Deckel darzu: der erste Becher wiegt 12 Loth,

Loth, legt man den Deckel darauf so wiegt er zweymal so viel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, so wiegt er dreymal so viel als der erste: hier ist nun die Frage wie viel der Deckel und auch der andere Becher gewogen?

Man setze der Deckel habe gewogen x Loth, so wiegt der erste Becher sammt dem Deckel $x + 12$ Loth. Da dieses Gewicht zweymal so groß ist, als des andern Bechers, so hat der andere gewogen $\frac{1}{2}x + 6$: legt man darauf den Deckel so wiegt er $\frac{3}{2}x + 6$ welches 3 mahl 12, das ist 36, gleich seyn muß. Also hat man $\frac{3}{2}x + 6 = 36$ oder $\frac{3}{2}x = 30$ und $\frac{1}{2}x = 10$ und $x = 20$.

Antwort: der Deckel hat gewogen 20 Loth, der andere Becher aber 16 Loth.

40.

XIX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Münze; von der ersten Sorte gehen a Stück auf einen Rthl. von der zweyten Sorte b Stück. Nun kommt einer und will c Stück vor einen Rthl. haben; wie viel muß ihm der Wechsler von jeder Sorte geben?

Man setze er gebe ihm von der ersten Sorte x Stück und also von der andern $c - x$ Stück. Nun sind aber jene x Stück werth $a : 1 = x : \frac{x}{a}$ Rthl. diese $c - x$ Stück aber sind werth b: $1 = c - x : \frac{c-x}{b}$ Rthl.

Also muß seyn $\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$, oder $\frac{bx}{a} + c - x = b$,

oder $bx + ac - ax = ab$, und weiter $bx - ax = ab - ac$,

folglich wird $x = \frac{ab-ac}{b-a}$ oder $x = \frac{a(b-c)}{b-a}$,

dahero wird $c - x = \frac{bc-ab}{b-a} = \frac{b(c-a)}{b-a}$.

Antwort: von der ersten Sorte giebt also der Wechsler $\frac{a(b-c)}{b-a}$ Stück, von der andern Sorte aber $\frac{b(c-a)}{b-a}$ Stück:

Anmerkung: Diese beyden Zahlen lassen sich leicht durch die Regeldetri finden; nämlich die erste durch diese:

wie $b-a : b-c = a : \frac{ab-ac}{b-a}$

für die zweyte Zahl gilt diese: wie $b-a : c-a = b : \frac{bc-ab}{b-a}$.

Hierbey ist zu merken, daß b größer ist als a, und c kleiner als b aber größer als a, wie die Natur der Sache erfordert.

41.

XX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Münze; von der ersten gelten 10 Stück einen Rthl. von der andern 20 Stück einen Rthl. Nun verlangt jemand 17 Stück für einen Rthl. wie viel bekommt er von jeder Sorte?

Hier ist also $a = 10$, $b = 20$ und $c = 17$; woraus diese Regeldetrien fließen:

I. 10: 3 = 10: 3, also von der ersten Sorte 3 Stück:
II. 10: 7 = 20: 14, und von der andern Sorte 14 Stück.

42.

XXI. Frage: Ein Vater verläßt nach seinem Tode einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder dergestalt unter sich theilen. Das erste nimmt 100 Rthl. und dazu noch den 10ten Theil des übrigen
Das zweyte nimmt 200 Rthl. und noch darzu den 10ten Theil des übrigen.
Das dritte nimmt 300 Rthl. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen.
Das vierte nimmt 400 Rthl. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen
und so fort: solcher gestalt findet es sich, daß das ganze

ze Vermögen unter die Kinder gleich vertheilet worden. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen gewesen, wie viel Kinder hinterlassen worden, und wie viel ein jedes bekommen?

Diese Frage ist von einer ganz besondern Art und verdienet deswegen bemerket zu werden. Um dieselbe desto leichter aufzulösen, so setze man das ganze hinterlassene Vermögen = z Rthl. und weil alle Kinder gleich viel bekommen, so sey das Antheil eines jeden = x; woraus man sieht, daß die Anzahl der Kinder gewesen $\frac{z}{x}$. Hieraus wollen wir die Auflösung folgender Gestalt anstellen.

Die Maße oder das zu theilende Geld.	Ordnung der Kinder	der Antheil eines jeden.	Die Differenzen
z	das erste	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
z − x	zweyte	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z − 2x	dritte	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z − 3x	vierte	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z − 4x	fünfte	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
z − 5x	sechste	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	u. s. w.

In der letzten Columne sind hier die Differenzen gesetzt worden, welche entstehen, wenn man ein jedes Erbtheil von dem folgenden subtrahirt. Weil nun

alle Erbtheile ein ander gleich sind, so muß eine jede von diesen Differenzen seyn = o. Da es sich nun so glücklich füget, daß alle Differenzen ein ander gleich sind, so ist es genug, daß man eine davon gleich o setze, dahero erhalten wir diese Gleichung $100 - \frac{x-100}{10} = 0$.

Man multiplicire mit 10 so erhält man $1000 - x - 100 = 0$, oder $900 - x = 0$, folglich $x = 900$.
Woraus wir schon wissen, daß das Erbtheil eines jeden Kindes 900 Rthl. gewesen. Man nehme nun eine von den Gleichungen in der dritten Columne, welche man will, z. E. die erste $900 = 100 + \frac{z-100}{10}$, woraus man z so gleich finden kann; denn $9000 = 1000 + z - 100$ oder $9000 = 900 + z$ also $z = 8100$, dahero wird $\frac{z}{x} = 9$.

Antwort: Also war die Anzahl der Kinder = 9 das hinterlassene Vermögen = 8100 Rthl. wovon ein jedes Kind bekommt 900 Rthl.

Capitel 4.

Von Auflösung zweyer oder mehr Gleichungen vom ersten Grad.

43.

Oefters geschieht es, daß zwey oder auch mehr unbekannte Zahlen so durch die Buchstaben x, y, z &c. vorgestellt werden, in die Rechnung gebracht werden müssen, da man denn, wenn anders die Frage bestimmt

stimmt ist, auf eben so viel Gleichungen kommt, aus welchen hernach die unbekannten Zahlen gefunden werden müssen. Hier betrachten wir aber nur solche Gleichungen wo nur die erste Potestät der unbekannten Zahl sich findet, und auch keine mit der andern multiplicirt ist. Also daß eine jede Gleichung von dieser Form seyn wird $az+by+cx=d$.

44.

Wir wollen also den Anfang von zwey Gleichungen machen, und daraus zwey unbekannte Zahlen x und y bestimmen, und um die Sache auf eine allgemeine Art zu tractiren, so seyn diese beyden Gleichungen gegeben I. $ax+by=c$ und II. $fx+gy=h$ wo die Buchstaben a, b, c und f, g, h die Stelle bekannter Zahlen vertreten. Hier ist nun die Frage wie man aus diesen beyden Gleichungen die beyden unbekannten Zahlen x und y heraus bringen soll.

45.

Der natürlichste Weg bestehet nun darinn, daß man aus einer jeden Gleichung, den Werth von einer unbekannten Zahl als z. E. von x bestimmt und hernach diese beyde Werthe einander gleich setzt; woraus man eine Gleichung erhält, da nur die unbekannte Zahl y vorkommt, welche man nach den obigen Reguln bestimmen kann. Hat man nun y gefunden, so darf man nur anstatt desselben seinen gefundenen Werth setzen, um daraus den Werth von x zu erhalten.

46.

Dieser Regel zu Folge findet man aus der ersten Gleichung $x=\frac{c-by}{a}$, aus der andern aber findet

man

man $x = \frac{h-gy}{f}$; diese beyden Werthe setze man einander gleich, so erhält man diese neue Gleichung $\frac{c-by}{a} = \frac{h-gy}{f}$

mit a multiplicirt, wird $c-by = \frac{ah-agy}{f}$

mit f multiplicirt wird $fc-fby = ah-agy$
Man addire agy so wird $fc-fby+agy = ah$
Man subtrahire fc so wird $-fby+agy = ah-fc$
oder $(ag-bf)\,y = ah-fc$

man dividire durch $ag-bf$ so wird $y = \frac{ah-fc}{ag-bf}$

schreibt man nun diesen Werth für y in einem der beyden, so vor x gefunden worden, so erhält man auch den Werth von x. Man nehme den ersten so hat man

erstlich $-by = -\frac{abh+bcf}{ag-bf}$,

hieraus wird $c-by = c-\frac{abh+bcf}{ag-bf}$,

oder $c-by = \frac{acg-bcf-abh+bcf}{ag-bf} = \frac{acg-abh}{ag-bf}$; durch a dividirt

giebt $x = \frac{c-by}{a} = \frac{cg-bh}{ag-bf}$.

47.

I. Frage: Um dieses durch Exempel zu erläutern, so sey diese Frage vorgelegt: Man suche zwey Zahlen deren Summe sey 15 und die Differenz 7?
Es sey die größere Zahl = x und die kleinere = y
so hat man I.) $x+y = 15$, und II.) $x-y = 7$.
aus der ersten bekommt man $x = 15-y$ und aus der zweyten $x = 7+y$.

woraus

woraus diese neue Gleichung entspringt $15-y=7+y$,
hier addire man y so hat man $15=7+2y$
man subtrahire 7 so wird $2y=8$
durch 2 dividirt wird $y=4$ und daraus $x=11$.
Antwort: die kleinere Zahl ist 4, die größere aber 11.

48.

II. Frage: Man kann diese Frage auch allgemein machen und zwey Zahlen suchen, deren Summe $=a$ und deren Differenz $=b$ sey.
Es sey die größere $=x$ und die kleinere $=y$
so hat man I.) $x+y=a$ und II.) $x-y=b$,
aus der ersten erhält man $x=a-y$ und aus der zweyten $x=b+y$
woraus diese Gleichung entspringt $a-y=b+y$,
man addire y so hat man $a=b+2y$
man subtrahire b so kommt $2y=a-b$

durch 2 dividirt wird $y=\frac{a-b}{2}$ und hieraus wird

$$x=a-\frac{a+b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

Antwort: die größere Zahl ist also $x=\frac{a+b}{2}$ und die kleinere $y=\frac{a-b}{2}$; oder da $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ und $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, so erhält man diesen Lehrsatz; die größere Zahl ist gleich der halben Summe plus der halben Differenz, und die kleinere Zahl ist gleich der halben Summe minus der halben Differenz.

49.

Man kann auch diese Frage auf folgende Weise auflösen: da die beyden Gleichungen sind $x+y=a$

und

und $x-y=b$, so addire man dieselbe so wird $2x=a+b$
und $x=\frac{a+b}{2}$

Hernach von der ersten subtrahire man die zweyte, so bekommt man $2y=a-b$ und $y=\frac{a-b}{2}$, wie vorher.

50.

III. Frage: Ein Maulesel und ein Esel tragen ein jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zwey mal so viel als du; darauf antwortet der Maulesel, wenn du mir ein Pud von deiner Last gäbest so hätte ich dreymal so viel als du, wie viel Pud hat ein jeder gehabt?

Der Maulesel habe gehabt x Pud, der Esel aber y Pud. Giebt nun der Maulesel dem Esel ein Pud, so hat der Esel $y+1$ der Maulesel aber behält noch $x-1$, da nun der Esel zweymal so viel hat als der Maulesel so wird $y+1=2x-2$.

Wenn aber der Esel dem Maulesel ein Pud giebt, so bekommt der Maulesel $x+1$ und der Esel behält noch $y-1$. Da nun jene Last dreymal so groß ist als diese, so wird $x+1=3y-3$.

Also sind unsere zwey Gleichungen

I) $y+1=2x-2$, II.) $x+1=3y-3$,

aus der ersten findet man $x=\frac{y+3}{2}$ und aus der andern

$x=3y-4$,

woraus diese neue Gleichung entspringt $\frac{y+3}{2}=3y-4$,

welche mit 2 multiplicirt giebt $y+3=6y-8$
und y subtrahirt kommt $5y-8=3$

addire

addire 8 so hat man $5y = 11$ und $y = 2\frac{1}{5}$ oder $2\frac{1}{5}$; hieraus $x = 2\frac{3}{5}$.
Antwort: Also hat der Mauleſel gehabt $2\frac{3}{5}$ Pud der Eſel aber $2\frac{1}{5}$ Pud.

51.

Hat man drey unbekannte Zahlen, und eben so viel Gleichungen als, z. E. I.) $x + y - z = 8$, II.) $x + z - y = 9$, III.) $y + z - x = 10$, so suche man ebenfalls aus einer jeden den Werth von x,
aus der I.) $x = 8 + z - y$, II.) $x = 9 + y - z$,
III.) $x = y + z - 10$.
Nun seze man erstlich den ersten gleich dem andern, und hernach auch gleich dem dritten so erhält man diese zwey neue Gleichungen:
I.) $8 + z - y = 9 + y - z$, II.) $8 + z - y = y + z - 10$.
Es folgt aber aus der ersten $2z - 2y = 1$, und aus der zweyten $2y = 18$, und da erhält man so gleich $y = 9$, welcher Werth in der vorhergehenden vor y geschrieben, giebt $2z - 18 = 1$ und $2z = 19$, dahero $z = 9\frac{1}{2}$, woraus gefunden wird $x = 8\frac{1}{2}$.

Hier hat es sich gefüget, daß in der lezten Gleichung der Buchstabe z verschwunden, und also y so gleich daraus bestimmt werden konnte. Wäre aber z auch noch darinnen vorgekommen, so hätte man zwey Gleichungen gehabt zwischen z und y, welche nach der ersten Regel aufgelöst werden müßten.

52.

Es seyn die drey folgenden Gleichungen gefunden worden,
I.) $3x + 5y - 4z = 25$, II.) $5x - 2y + 3z = 46$, III.) $3y + 5z - x = 62$.
Man suche aus einer jeden den Werth von x, so hat man

I.) $x = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$, II.) $x = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$, III.) $x = 3y + 5z - 62$.

Nun

Nun vergleiche man diese drey Werthe unter sich, so giebt der IIIte und Ite $3y + 5z - 62 = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$,

oder mit 3 multiplicirt $25 - 5y + 4z = 9y + 15z - 186$
addire 186 so kommt $211 - 5y + 4z = 9y + 15z$
5y addirt giebt $211 + 4z = 14y + 15z$
also aus I und III erhält man $211 = 14y + 11z$.

Die IIte und IIIte giebt $3y + 5z - 62 = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$

oder $46 + 2y - 3z = 15y + 25z - 310$ und man findet aus dieser Gleichung $356 = 13y + 28z$.
aus einer jeden dieser beyden Gleichungen suche man den Werth für y.
I.) $211 = 14y + 11z$, wo $11z$ subtrahirt, bleibt $14y = 211 - 11z$ oder $y = \frac{211 - 11z}{14}$

II.) $356 = 13y + 28z$, wo $28z$ subtrahirt, bleibt $13y = 356 - 28z$ oder $y = \frac{356 - 28z}{13}$

diese zwey Werthe einander gleich gesetzt, geben:
$\frac{211 - 11z}{14} = \frac{356 - 28z}{13}$, mit 13. 14 multiplicirt wird
$2743 - 143z = 4984 - 392z$
und $392z$ addirt, giebt $249z + 2743 = 4984$ oder $249z = 2241$ und also $z = 9$.
Hieraus erhält man $y = 9$, und endlich $x = 7$.

53.

Sollten mehr als drey unbekannte Zahlen, und eben so viel Gleichungen vorkommen, so könnte man die Auflösung auf eine ähnliche Art anstellen, welches gemeiniglich auf verdrießliche Rechnungen leiten würde.

Es pflegen sich aber bey einem jeglichen Fall solche Mittel zu äußern, wodurch die Auflösung ungemein erleichtert wird, und solches geschieht, indem man außer den Haupt unbekannten Zahlen noch eine neue willkührliche, als z. E. die Summe aller in die Rechnung mit einführet, welches von einem der sich in dergleichen Rechnungen schon ziemlich geübet hat, in einem jeglichen Fall leicht beurtheilet wird. Zu diesem Ende wollen wir einige dergleichen Exempel anführen.

54.

IV. Frage: Drey spielen mit einander, im ersten Spiel verliert der erste an jeden der beyden andern so viel, als ein jeder von den zwey andern an Gelde bey sich hatte. Im andern Spiel verliert der zweyte an den ersten und dritten so viel als ein jeder hat. Im dritten Spiel verliert der dritte an den ersten und zweyten so viel ein jeder hatte, und da findet es sich, daß alle nach geendigtem Spiel gleich viel haben, ein jeder nämlich 24 Fl. Nun ist die Frage, wie viel ein jeder anfänglich gehabt habe?

Man setze der erste habe gehabt x Fl. der zweyte y und der dritte z. Ueber dieses setze man die Summe aller Fl. zusammen $x + y + z = f$. Da nun im ersten Spiel der erste so viel verliert als die beyden andern haben, und der erste x hat, so haben die beyden andern $f - x$, und so viel verliert der erste, daher ihm noch übrig bleiben $2x - f$: der zweyte aber wird haben $2y$ und der dritte $2z$.

Also nach dem ersten Spiel wird ein jeder haben wie folget: der I.) $2x - f$, der II.) $2y$, der III.) $2z$.

Im zweyten Spiel verliert der andere, der nun $2y$ hat, an die beyden andern, so viel als sie haben, oder $f - 2y$. Dahero der zweyte noch behält $4y - f$; die beyden andern aber werden zweymal so viel haben als vorher.

Also nach dem zweyten Spiel wird haben:
der I.) $4x - 2f$, der II.) $4y - f$, der III.) $4z$.

Im dritten Spiel verliert der dritte, der jetzt $4z$ hat, an die andern beyde so viel sie haben, sie haben aber $f - 4z$; also behält der dritte noch $8z - f$, und die beyden übrigen bekommen doppelt so viel als sie hatten. Also wird nach dem dritten Spiele ein jeder haben:
der I.) $8x - 4f$, der II.) $8y - 2f$, und der III.) $8z - f$,
da nun jetzt ein jeder 24 Fl. hat, so erhalten wir drey Gleichungen, welche so beschaffen sind, daß man aus der ersten so gleich x, aus der andern y und aus der dritten z finden kann, insonderheit da jetzt f eine bekannte Zahl ist, indem alle zusammen am Ende des Spiels 72 Fl. haben. Allein dieses wird sich von selbst geben, ohne daß man nöthig habe darauf zu sehen.

Diese Rechnung wird demnach also stehen:
I.) $8x - 4f = 24$, oder $8x = 24 + 4f$, oder $x = 3 + \frac{1}{2}f$.
II.) $8y - 2f = 24$, oder $8y = 24 + 2f$, oder $y = 3 + \frac{1}{4}f$.
III.) $8z - f = 24$, oder $8z = 24 + f$, oder $z = 3 + \frac{1}{8}f$.

man addire diese 3 Werthe, so bekommt man
$x + y + z = 9 + \frac{7}{8}f$,
da nun $x + y + z = f$, so hat man $f = 9 + \frac{7}{8}f$:
$\frac{7}{8}f$ subtrahirt bleibt $\frac{1}{8}f = 9$ und $f = 72$.
Antwort: Also vom Anfange des Spiels hatte der erste 39 Fl. der zweyte 21 Fl. und der dritte 12.

Aus dieser Auflösung sieht man, wie durch Hülfe der Summe der drey unbekannten Zahlen alle oben angeführte Schwierigkeiten glücklich aus dem Wege geräumet worden.

55.

So schwer diese Frage scheinet, so ist doch zu merken, daß dieselbe so gar ohne Algebra aufgelöset werden kann.

Man

Man darf nur in Betrachtung derselben rückwärts gehen: denn da die drey Personen nach dem dritten Spiele gleich viel bekommen haben, nämlich der erste 24 der zweyte 24, der dritte 24; im dritten Spiel aber der erste und zweyte ihr Geld verdoppelt haben, so müssen sie vor dem dritten Spiele gehabt haben, wie folget:
I.) 12, II.) 12, III.) 48.

Im zweyten Spiel hat der erste und dritte sein Spiel verdoppelt, also müssen sie vor dem zweyten Spiele gehabt haben.
I.) 6, II.) 42, III.) 24.
Im ersten Spiele hat der zweyte und dritte sein Geld verdoppelt, also vor dem ersten Spiele haben sie gehabt.
I.) 39, II.) 21, III.) 12.
und eben so viel haben wir auch vorher für den Anfang des Spiels gefunden.

56.

V. Frage: Zwey Personen sind schuldig 29 Rub. und es hat zwar ein jeder Geld, doch nicht so viel, daß er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte, darum spricht der erste zu dem andern; giebst du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes, so könnte ich die Schuld so gleich allein bezahlen: der andere antwortet dagegen, giebst du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, so könnte ich die Schuld allein bezahlen: wie viel Geld hat jeder gehabt?
Der erste habe gehabt x Rub. der andere y Rub.
Also bekommt man erstlich $x + \frac{2}{3} y = 29$
hernach auch $y + \frac{3}{4} x = 29$.
Aus dem ersten findet man $x = 29 - \frac{2}{3} y$,
aus dem zweyten $x = \frac{116 - 4y}{3}$,

Aus diesen beyden Werthen entsteht diese Gleichung:
$29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{3}$, also $y=14\frac{1}{2}$: dahero wird $x=19\frac{1}{3}$:

Antwort: der erste hat gehabt $19\frac{1}{3}$ der zweyte $14\frac{1}{2}$ Rub.

57.

VI. Frage: Drey haben ein Haus gekauft für 100 Rthl. der erste begehrt vom andern $\frac{1}{2}$ seines Geldes, so könnte er das Haus allein bezahlen: der andere begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ seines Geldes, so könnte er das Haus allein bezahlen. Der dritte begehrt vom ersten $\frac{1}{4}$ seines Geldes, so möchte er das Haus allein bezahlen. Wie viel hat jeder Geld gehabt?

Der erste habe gehabt x, der zweyte y, der dritte z Rthl. so bekommt man folgende drey Gleichungen
I.) $x+\frac{1}{2}y=100$. II.) $y+\frac{1}{3}z=100$. III.) $z+\frac{1}{4}x=100$,
aus welchen der Werth von x gefunden wird:
I.) $x=100-\frac{1}{2}y$, III.) $x=400-4z$,
hier konnte nämlich aus der zweyten Gleichung x nichts bestimmt werden.

Die beyden Werthe aber geben diese Gleichung:
$00-\frac{1}{2}y=400-4z$, oder $4z-\frac{1}{2}y=300$
welche mit der zweyten verbunden werden muß, um daraus y und z zu finden. Nun aber war die zweyte Gleichung $y+\frac{1}{3}z=100$; woraus gefunden wird $y=100-\frac{1}{3}z$; aus der oben gefundenen Gleichung $4z-\frac{1}{2}y=300$ aber ist bekannt $y=8z-600$
woraus diese letzte Gleichung entspringt:
$100-\frac{1}{3}z=8z-600$, also $8\frac{1}{3}z=700$, oder $\frac{25}{3}z=700$, und $z=84$, hieraus findet man $y=100-28$, oder $y=72$, und endlich $x=64$.

Antwort: der erste hat gehabt 64 Rthl. der zweyte 72 Rthl. der dritte 84 Rthl.

58.

Da bey diesem Exempel in einer jeden Gleichung nur zwey unbekannte Zahlen vorkommen, so kann die Auflösung auf eine bequemere Art angestellet werden.

Denn man suche aus der ersten $y = 200 - 2x$, welches also durch x bestimmt wird, diesen Werth schreibe man vor y in der zweyten Gleichung, so hat man $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$, 100 subtrahirt, so bleibt $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, oder $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ und $z = 6x - 300$.

Also ist auch z durch x bestimmt: diesen Werth bringe man nun in die dritte Gleichung, so kommt $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, in welcher nur x allein vorkommt, und also $25x - 1600 = 0$ dahero $x = 64$, folglich $y = 200 - 128 = 72$

und $z = 384 - 300 = 84$.

59.

Eben so kann man verfahren, wenn auch mehr solche Gleichungen vorkommen: also wenn man auf eine allgemeine Art hat.

I.) $u + \frac{x}{a} = n$, II.) $x + \frac{y}{b} = n$, III.) $y + \frac{z}{c} = n$,

IV.) $z + \frac{u}{d} = n$,

oder nach dem man die Brüche weggebracht diese:

I.) $au + x = an$, II.) $bx + y = bn$, III.) $cy + z = cn$

IV.) $dz + u = dn$.

Hier bekommen wir aus der ersten $x = an - au$, welcher Werth in der zweyten giebt $abn - abu + y = bn$ also $y = bn - abn + abu$; dieser Werth in der dritten giebt $bcn - abcn + abcu + z = cn$, also $z = cn - bcn + abcn - abcu$; dieser endlich in der vierten Glei-

chung giebt cdn – bcdn + abcdn – abcdu + u = dn.
Also wird dn – cdn + bcdn – abcdn = – abcdu + u
oder (abcd – 1) u = abcdn – bcdn + cdn – dn wor-

aus man erhält $u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$.

Hieraus findet man ferner wie folget:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

60.

VII. Frage: Ein Hauptmann hat drey Compagnien Soldaten. In einer sind Schweizer, in der andern Schwaben, in der dritten Sachsen; mit diesen will er eine Stadt bestürmen, und verspricht zur Belohnung 901 Rthl. also auszutheilen:

Daß von der Compagnie, die den Sturm thut, ein jeder 1 Rthl. bekommen, das übrige Geld aber unter die beyden andern Compagnien gleich vertheilet werden soll.

Nun findet es sich, daß wenn die Schweizer den Sturm thäten, ein jeder von den beyden andern $\frac{1}{2}$ Rthl. bekäme; wenn aber die Schwaben den Sturm thäten, ein jeder der beyden andern $\frac{1}{3}$ Rthl. bekommen würde. Thäten aber die Sachsen den Sturm, so

würde

würde ein jeder der beyden andern $\frac{1}{4}$ Rthl. bekommen. Nun ist die Frage, aus wie viel Köpfen eine jede Compagnie bestanden?

Man setze nun, die Zahl der Schweizer sey gewesen x Köpfe, der Schwaben y und der Sachsen z.

Ferner setze man die Anzahl aller $x + y + z = f$, weil leicht vorher zu sehen, daß dadurch die Rechnung gar sehr erleichtert wird. Denn wenn die Schweizer den Sturm thun, deren Anzahl $= x$, so ist die Zahl der beyden übrigen $= f - x$, da nun jene 1 Rthl. diese aber einen halben Rthl. bekommen, so wird $x + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}x = 901$.

Eben so wenn die Schwaben Sturm laufen, so wird
$y + \frac{1}{3}f - \frac{1}{3}y = 901$,
und endlich wenn die Sachsen Sturm laufen, so wird
$z + \frac{1}{4}f - \frac{1}{4}z = 901$ seyn.

Aus welchen drey Gleichungen ein jeder der drey Buchstaben x, y und z bestimmt werden kann;
Denn aus der ersten erhält man $x = 1802 - f$,
aus der andern $2y = 2703 - f$,
aus der dritten $3z = 3604 - f$.

Nun schreibe man dieselben unter einander; suche aber erstlich die Werthe von 6x, 6y, und 6z.

$$6x = 10812 - 6f$$
$$6y = 8109 - 3f$$
$$6z = 7208 - 2f$$

---

addirt: $6f = 26129 - 11f$, oder $17f = 26129$ woraus gefunden wird $f = 1537$, welches die Anzahl aller Köpfe ist, und daraus findet man ferner:

$x = 1802 - 1537 = 265$
$2y = 2703 - 1537 = 1166$ und $y = 583$
$3z = 3604 - 1537 = 2067$ und $z = 689$.

Antwort: die Compagnie der Schweizer bestand also aus 265 Mann, die Schwaben aus 583, und die Sachsen aus 689 Mann.

Capitel 5.

Von der Auflösung der reinen Quadratischen Gleichungen.

61.

Eine Gleichung wird Quadratisch genennt, wenn darinn das Quadrat oder die zweyte Potestät der unbekannten Zahl vorkommt, wenn sich nur keine höhere Potestäten davon darinn befinden. Denn sollte darinn auch die dritte Potestät vorkommen, so wird eine solche Gleichung schon zu den Cubischen gerechnet, wovon die Auflösung besondere Regeln erfordert.

62.

In einer Quadratischen Gleichung kommen also nur dreyerley Glieder vor: zum ersten solche Glieder, worinnen die unbekannte Zahl gar nicht enthalten ist, oder welche blos allein aus bekannten Zahlen zusammen gesetzt sind.

Zweytens solche Glieder, in welchen nur die erste Potestät der unbekannten Zahl vorkommt.

Und drittens solche, in welchen das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten ist.

Also, wenn x die unbekannte Zahl andeutet, die Buchstaben a, b, c, d etc. aber bekannte Zahlen vorstellen, so haben die Glieder der ersten Art diese Form a, von der zweyten Art haben die Glieder die Form bx, und die Glieder der dritten Art haben die Form cxx.

63.

Man hat schon zur Gnüge gesehen, daß zwey oder mehr Glieder von einer Art, in ein einiges zusammen gezo-

gezogen, oder als ein einiges Glied betrachtet werden können.

Also kann diese Form $axx - bxx + cxx$ als ein einziges Glied angesehen, und also vorgestellet werden $(a - b + c)\,xx$ weil in der That $a - b + c$ eine bekannte Zahl ausdrückt:

Wenn sich auch solche Glieder zu beyden Seiten des Zeichens = befinden sollten, so hat man schon gesehen, wie dieselben auf eine Seite gebracht, und in eines zusammen gezogen werden können:
Also wenn diese Gleichung vorkommt
$2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11;$
so subtrahirt man erstlich $2xx$, so kommt
$-3x + 4 = 3xx - 8x + 11;$
hernach addire man $8x$, so hat man $5x + 4 = 3xx + 11;$
und 11 subtrahirt giebt $3xx = 5x - 7$.

64.

Man kann auch alle Glieder auf einer Seite des Zeichens = bringen, so daß auf der andern Seite o zu stehen kommt; wobey zu bemerken, daß wenn Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müssen:

Also wird die obige Gleichung diese Form bekommen $3xx - 5x + 7 = o$ und so wird auch insgemein eine jegliche Quadratische Gleichung durch diese Form vorgestellt werden können

$$axx \pm bx \pm c = o,$$

wo das Zeichen $\pm$ durch plus oder minus ausgesprochen wird, um anzuzeigen, daß solche Glieder bald Positiv bald Negativ seyn können.

65.

Es mag eine Quadratische Gleichung anfänglich aussehen wie sie will, so kann dieselbe doch immer auf

diese Form, welche nur aus drey Gliedern bestehet, gebracht werden; wenn man z. E. auf diese Gleichung gekommen wäre:

$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$ so müßten vor allen Dingen die Brüche gehoben werden: also multiplicire man mit cx + d so bekommt man $ax+b = \frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$

hier mit gx+h multiplicirt, giebt

agxx + bgx + ahx + bh = ce xx + cfx + edx + fd

welches eine Quadratische Gleichung ist, und auf folgende drey Glieder gebracht werden kann, wenn alle auf eine Seite gesetzt werden, und welche man also unter einander zu schreiben pfleget:

$$\begin{aligned} 0 &= agxx + bgx + bh \\ &- cexx + ahx - fd \\ &- cfx \\ &- edx \end{aligned}$$

oder um dieselbe noch deutlicher vorzustellen

$0 = (ag - ce)\,xx + (bg + ah - cf - ed)\,x + bh - fd.$

66.

Dergleichen Quadratische Gleichungen worinn von allen dreyen Arten Glieder enthalten sind, werden vollständige genennt, und die Auflösung derselben ist auch mehr Schwierigkeiten unterworfen, daher wir erstlich solche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eines von diesen dreyen Gliedern mangelt. Sollte nun das Glied xx gar nicht vorhanden seyn, so wäre die Gleichung nicht einmahl Quadratisch, und gehörte zu der vorigen Art; sollte aber das Glied, so blos bekannte Zahlen enthält, mangeln, so würde die Gleichung also aussehen $axx \pm bx = 0$, wo man durch x theilen kann, und daher zu dieser Gleichung kommt $ax \pm b = 0$,

welche

welche wieder eine einfache Gleichung ist, und nicht hieher gehört.

67.

Wenn aber das mittlere Glied, so nur die erste Potestät des x enthält, mangelt, so bekommt die Gleichung diese Form: $axx \pm c = o$, oder $axx = c$, es mag nun c das Zeichen + oder − haben;

Eine solche Gleichung wird eine reine Quadratische genennt, weil ihre Auflösung keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Denn man darf nur durch a theilen, so bekommt man $xx = \frac{c}{a}$; und beyderseits die Quadrat-Wurzel genommen, so hat man $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; wodurch die Gleichung aufgelöset worden.

68.

Hier sind nun drey Fälle zu erwegen. Der erste wenn $\frac{c}{a}$ eine Quadrat-Zahl ist, davon sich die Wurzel wirklich anzeigen läßt; da erhält man den Werth von x durch eine Rational-Zahl ausgedrückt, dieselbe mag ganz oder gebrochen seyn.
Also aus dieser Gleichung $xx = 144$ bekommt man $x = 12$, und aus dieser $xx = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \frac{3}{4}$.

Der zweyte Fall ist, wenn $\frac{c}{a}$ keine Quadrat-Zahl ist, da man sich denn mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ begnügen muß.

Also wenn $xx = 12$, so wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung bestimmt werden kann, wie wir schon oben gezeigt haben.

Ist aber drittens $\frac{a}{c}$ gar eine Negativ-Zahl, so wird der Werth von x ganz und gar unmöglich oder Imaginär und zeiget an, daß die Frage, welche auf eine solche Gleichung geführet, an sich unmöglich sey.

69.

Ehe wir weiter gehen, ist noch zu bemerken, daß so oft aus einer Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß, dieselbe allezeit einen doppelten Werth erhalte, und so wohl Positiv als Negativ genommen werden könne, wie schon oben gezeigt worden.

Also wenn man auf diese Gleichung kommt xx = 49, so ist der Werth von x nicht nur + 7 sondern auch − 7, und pflegt dahero also angedeutet zu werden: $x = \pm 7$, woraus erhellet, daß alle diese Fragen eine doppelte Auflösung zulassen, in vielen Fällen aber, wo etwann von einer Anzahl Menschen die Frage ist, fällt der Negative Werth von selbsten weg.

70.

Auch bey dem vorhergehenden Fall, wo die bloße Zahl mangelt, lassen die Gleichungen axx = bx immer zweyerley Werthe vor x zu, obgleich nur einer gefunden wird, wenn man durch x dividirt. Denn wenn z. E. diese Gleichung vorkommt xx = 3x wo ein solcher Werth für x gegeben werden soll, daß xx dem 3x gleich werde, so geschieht dieses, wenn man setzt x = 3 welcher Werth heraus kommt, wenn man durch x dividirt, allein außer diesem leistet auch der Werth x = 0 ein Genügen; denn da wird xx = 0 und 3x = 0. Dieses ist bey allen quadratischen Gleichungen zu merken, daß immer zwey Auflösungen statt finden, dahingegen bey den einfachen Gleichungen, nie mehr als eine Platz hat.

Wir

Wir wollen nun diese reine Quadratische Gleichungen durch einige Exempel erläutern.

71

I. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihren $\frac{1}{3}$ multiplicirt 24 gebe?

Es sey diese Zahl = x so muß $\frac{1}{2}$ x mit $\frac{1}{3}$ x multiplicirt 24 werden, woraus diese Gleichung entspringt $\frac{1}{6}$ xx = 24.

Mit 6 multiplicirt wird xx = 144 und Quadratwurzel ausgezogen $x = \pm 12$. Denn wenn $x = +12$, so ist $\frac{1}{2}x = +6$ und $\frac{1}{3}x = +4$, wovon das Product 24 ist. Ebenfalls wenn $y = -12$ so ist $\frac{1}{2}x = -6$ und $\frac{1}{3}x = -4$ und das Product davon auch 24.

72.

II. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, wenn zu derselben erstlich 5 addirt und hernach auch 5 subtrahirt und die Summe mit dem Rest multiplicirt wird; 96 heraus komme?

Es sey diese Zahl x so muß $x + 5$ mit $x - 5$ multiplicirt 96 geben, woraus diese Gleichung entspringt

$xx - 25 = 96$

Man addire 25 so wird $xx = 121$

und die Quadratwurzel ausgezogen $x = 11$

denn da wird $x + 5 = 16$ und $x - 5 = 6$. Nun aber ist $6 \cdot 16 = 96$.

73.

III. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, daß wenn dieselbe erstlich zu 10 addirt, hernach auch von 10 subtrahirt, jene Summe mit diesem Rest multiplicirt 51 gebe?

Es sey die Zahl x so muß $10 + x$ mit $10 - x$ multiplicirt 51 geben, woraus diese Gleichung entsteht

$100 - xx = 51$.

Man

Man addire xx und subtrahire 51, so kommt xx = 49, wovon die Quadratwurzel anzeigt x = 7.

74.

IV. Frage: Es haben drey Personen Geld, so oft der erste hat 7 Rthl. hat der andere 3 Rthl. und so oft der andere hat 17 Rthl. hat der dritte 5 Rthl. so ich aber das Geld des ersten mit dem Geld des andern, und das Geld des andern mit dem Geld des dritten und auch endlich das Geld des dritten mit dem Geld des ersten multiplicire, hernach diese drey Producte zusammen addire, so wird die Summe $3830\frac{2}{3}$ seyn. Wie viel Geld hat ein jeder gehabt?

Man setze, der erste habe gehabt x Rthl. und da gesagt wird, daß so oft der erste 7 Rthl. habe, so habe der andere 3 Rthl. so will dieses so viel sagen, daß das Geld des ersten sich zum Geld des andern verhalte wie 7: 3.

Man setze also wie 7: 3 = x zum Geld des andern, welches seyn wird $\frac{3}{7}$ x.

Da ferner das Geld des andern sich verhält zum Geld des dritten, wie 17: 5,

so setze man, wie 17: 5 = $\frac{3}{7}$ x zum Geld des dritten, welches seyn wird $\frac{15}{119}$ x.

Nun multiplicire man das Geld des ersten x mit dem Geld des andern $\frac{3}{7}$ x so wird das Product = $\frac{3}{7}$ xx.

Ferner das Geld des andern $\frac{3}{7}$ x mit dem Geld des dritten $\frac{15}{119}$ x multiplicirt, giebt $\frac{45}{833}$ xx.

Und endlich das Geld des dritten $\frac{15}{119}$ x mit dem Geld des ersten x multiplicirt, giebt $\frac{15}{119}$ xx. Diese drey Producte zusammen machen $\frac{3}{7}$ xx + $\frac{45}{833}$ xx + $\frac{15}{119}$ xx, welche unter einen Nenner gebracht, geben $\frac{507}{833}$ xx, so der Zahl $3830\frac{2}{3}$ gleich gesetzt werden muß:

Also hat man $\frac{507}{833}$ xx = $3830\frac{2}{3}$

mit 3 multiplicirt, so bekommt man $\frac{1521}{833}$ xx = 11492

ferner

ferner mit 833 multiplicirt, giebt 1521 xx = 9572836 und durch 1521 dividirt, wird $xx = \frac{9572836}{1521}$ woraus die Quadratwurzel gezogen, giebt $x = \frac{3094}{39}$, welcher Bruch sich durch 13 verkleinern läßt und da kommt $x = \frac{238}{3}$, oder $x = 79\frac{1}{3}$: daher erhält man ferner $\frac{3}{7}x = 34$ und $\frac{15}{119}x = 10$.

Antwort: Also hat der erste $79\frac{1}{3}$ Rthl. der zweyte 34 Rthl. und der dritte 10 Rthl. gehabt.

Anmerkung: diese Rechnung läßt sich noch leichter anstellen, wenn man die darinn vorkommenden Zahlen in ihre Factores auflöset, und dabey insonderheit ihre Quadrate bemerkt:

Also ist 507 = 3. 169, wo 169 das Quadrat von 13 ist: hernach ist 833 = 7. 119 und 119 = 7. 17 da man nun hat, $\frac{3.169}{17.49}xx = 3830\frac{2}{3}$ so multiplicire man mit 3, da kommt $\frac{9.169}{17.49}xx = 11492$. Diese Zahl löse man auch in ihre Factores auf, wovon der erste 4 so gleich in die Augen fällt, also daß 11492 = 4. 2873: ferner läßt sich 2873 durch 17 theilen und wird 2873 = 17. 169, daher unsere Gleichung also aussieht:

$\frac{9.169}{17.49}xx = 4.17.169$, welche durch 169 dividirt, wird: $\frac{9}{17.49}xx = 4.17$; ferner mit 17. 40 multiplicirt und durch 9 dividirt giebt $xx = \frac{4.289.49}{9}$, wo alle Factores Quadrate sind und also die Wurzel seyn wird $x = \frac{2.17.7}{3} = \frac{238}{3}$ wie oben.

75.

V. Frage: Etliche Kaufleute bestellen einen Factor, schicken ihn nach Archangel zu halten einen Handel, haben eingelegt jeder zehnmal so viel Rthl. als der Personen sind. Gewinnt der Factor je mit 100 Rthl. zweymal so viel als der Personen sind. Wenn

man

man denn $\frac{1}{100}$ Theil des ganzen Gewinnsts multiplicirt mit $2\frac{2}{9}$ so kommt die Zahl der Gesellen heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

Die Anzahl derselben sey = x und da ein jeder 10 x Rthl. eingelegt hat, so war das ganze Capital = 10 xx Rthl. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthl. 2 x Rthl. folglich gewinnt er $\frac{1}{5}$ x^3 mit dem ganzen Capital 10 xx. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnsts ist demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, das ist mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$ welches der Zahl der Gesellen x gleich seyn muß:

Also hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche Cubisch zu seyn scheinet, weil man aber durch x dividiren kann, so kommt diese Quadratische heraus $xx = 225$ und $x = 15$.

Antwort: es sind dahero in allen 15 Gesellen gewesen und ein jeder hat 150 Rthl. eingelegt.

Capitel 6.

Von der Auflösung der vermischten Quadratischen Gleichungen.

76.

Eine vermischte Quadratische Gleichung wird genennt, wenn in derselben dreyerley Glieder vorkommen, nämlich solche, welche das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten, wie axx; hernach auch solche, worinn die unbekannte Zahl selbst vorkommt, als bx, und endlich solche Glieder, welche bloß aus bekannten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwey oder mehr Glieder von einer Art in eins zusammen gezogen werden, und alle auf eine Seite des Zeichens = gebracht

bracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung also beschaffen seyn:

$a\,xx \mp bx \mp c = o$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von x gefunden werden soll, wird in diesem Capitel gezeigt werden, zu welchem Ende zweyerley Wege führen.

77.

Eine solche Gleichung kann durch die Theilung also eingerichtet werden, daß das erste Glied bloß allein das reine Quadrat der unbekannten Zahl xx enthalte: hernach lasse man das zweyte Glied auf eben der Seite wo xx steht, das bekannte Glied aber bringe man auf die andere Seite. Solcher Gestalt wird unsere Gleichung diese Form bekommen $xx \pm px = \pm q$, wo p und q bekannte Zahlen, sowohl positive als negative andeuten; und jetzo kommt alles darauf an, wie der wahre Werth von x gefunden werden soll. Hierbey ist zuerst zu bemerken, daß wenn $xx + px$ ein wirkliches Quadrat wäre, die Auflösung keine Schwierigkeit haben würde, weil man nur nöthig hätte beyderseits die Quadratwurzel zu nehmen.

78.

Es ist aber klar, daß $xx + px$ kein Quadrat seyn kann, weil wir oben gesehen, daß wenn die Wurzel aus zwey Gliedern besteht, z. E. $x + n$, das Quadrat davon drey Glieder enthalte, nämlich außer dem Quadrat eines jeden Theils, noch das doppelte Product beyder Theile, also daß das Quadrat von $x + n$ seyn wird $xx + 2nx + nn$. Da wir nun auf einer Seite schon haben $xx + px$ so können wir xx als das Quadrat des ersten Theils der Wurzel ansehen, und da muß px das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel x mit dem andern Theil seyn; daher der an-

dere Theil $\frac{1}{2}p$ seyn muß, wie denn auch in der That das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ gefunden wird $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

79.

Da nun $xx + px + \frac{1}{4}pp$ ein wirkliches Quadrat ist, wovon die Wurzel $x + \frac{1}{2}p$, so dürfen wir nur bey unserer Gleichung zu $xx + px = q$ beyderseits $\frac{1}{4}pp$ addiren und da bekommen wir $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, wo auf der ersten Seite ein wirkliches Quadrat, auf der andern aber bloß bekannte Zahlen befindlich sind. Wenn wir daher beyderseits die Quadratwurzel nehmen, so erhalten wir $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, so erhält man $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$; und da eine jede Quadratwurzel so wohl Positiv als Negativ genommen werden kann, so findet man für x zwey Werthe, welche also durch diese Form ausgedrückt zu werden pflegen:
$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$.

80.

In dieser Formel ist nun die Regel enthalten, nach welcher alle Quadratgleichungen aufgelöset werden können, und damit man nicht immer nöthig habe, die obige Operation von neuem anzustellen, so ist genug, daß man den Inhalt dieser Formel dem Gedächtnisse wohl einpräge. Man kann demnach die Gleichung so anordnen, daß das bloße Quadrat xx auf einer Seite zu stehen komme, daher die obige Gleichung diese Form erhalten wird: $xx = -px + q$ wovon der Werth von x so gleich also hingeschrieben werden kann:
$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$.

81.

Hieraus wird nun diese allgemeine Regel gezogen um die Gleichung $xx = -px + q$ aufzulösen.

Man

Man sieht nämlich, daß die unbekannte Zahl, x gleich seyn werde der Hälfte der Zahl, womit x auf der andern Seite multiplicirt ist, und über das noch + oder − der Quadratwurzel aus dem Quadrat der Zahl, so eben geschrieben worden, nebst der bloßen Zahl so das dritte Glied der Gleichung ausmacht.

Wenn daher diese Gleichung vorkäme $xx = 6x + 7$, so würde man so gleich haben $x = 3 \pm r(9+7) = 3 \pm 4$: folglich sind die beyden Werthe von x I.) $x = 7$, und II.) $x = -1$.

Hätte man diese Gleichung $xx = 10x - 9$, so wird $x = 5 \pm r(25-9)$, welches $= 5 \pm 4$; daher die beyden Werthe seyn werden $x = 9$ und $x = 1$.

82.

Zu mehrerer Erläuterung dieser Regel können folgende Fälle unterschieden werden, I.) wenn p eine gerade Zahl ist, II.) wenn p eine ungerade Zahl ist, und III.) wenn p eine gebrochene Zahl ist.

Es sey I.) p eine gerade Zahl und die Gleichung also beschaffen:

$xx = 2px + q$, so bekommt man $x = p \pm r(pp+q)$:

Es sey II.) p eine ungerade Zahl und die Gleichung $xx = px + q$, da denn seyn wird

$x = \frac{1}{2}p \pm r(\frac{1}{4}pp + q)$ da nun $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, aus dem Nenner 4 aber die Quadratwurzel gezogen werden kann, so bekommt man

$x = \frac{1}{2}p \pm \frac{r(pp+4q)}{2}$ oder $x = \frac{p \pm r(pp+4q)}{2}$.

Wird aber III.) p ein Bruch, so kann die Auflösung folgender Gestalt geschehen. Es sey die Quadratische Gleichung $axx = bx + c$, oder $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$,

so wird nach der Regel $x = \frac{b}{2a} \pm r \left\{ \frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} \right\}$. Da nun aber $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb + 4ac}{4aa}$ und hier der Nenner ein Quadrat ist, so wird $x = \frac{b \pm r(bb + 4ac)}{2a}$.

83.

Der andere Weg welcher auch zu dieser Auflösung führet, bestehet darinn, daß man eine solche vermischte Quadratische Gleichung nämlich:
$xx = px + q$ in eine reine verwandele, welches geschiehet, wenn man anstatt der unbekannten Zahl x eine andere y in die Rechnung einführet, also daß $x = y + \frac{1}{2}p$; da man denn, wenn y gefunden worden, auch so gleich den Werth vor x erhält.

Schreibt man nun $y + \frac{1}{2}p$ anstatt x, so wird $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ und $px = py + \frac{1}{2}pp$: hieraus wird unsere Gleichung also zu stehen kommen
$yy + py + \frac{1}{4}pp = py + \frac{1}{2}pp + q$
subtrahirt man hier erstlich py, so hat man
$yy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}pp + q$
ferner $\frac{1}{4}pp$ subtrahirt, giebt $yy = \frac{1}{4}pp + q$, welches eine reine quadratische Gleichung ist, woraus man so gleich erhält $y = \pm r(\frac{1}{4}pp + q)$.
Da nun $x = y + \frac{1}{2}p$, so wird $x = \frac{1}{2}p \pm r(\frac{1}{4}pp + q)$, wie wir schon oben gefunden haben. Es ist also nichts mehr übrig als diese Regel mit Exempeln zu erläutern.

84.

I. Frage: Ich habe zwey Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere und ihr Product macht 91, welches sind diese Zahlen?

Die

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere x + 6 und ihr Product $xx+6x=91$.
Man subtrahire 6x, so hat man $xx=-6x+91$, und nach der Regel $x=-3\pm\sqrt{(9+91)}=-3\pm 10$, daher hat man entweder $x=7$ oder $x=-13$.
Antwort: die Frage hat also zwey Auflösungen; nach der ersten ist die kleinere Zahl $x=7$ die größere $x+6=13$

Nach der andern aber ist die kleinere $x=-13$ und die größere $x+6=-7$.

85.

II. Frage: Suche eine Zahl wenn ich von ihrem Quadrat subtrahire 9, daß gleich so viel über 100 bleiben als meine Zahl weniger ist als 23: welche Zahl ist es?

Es sey die Zahl x, so ist $xx-9$ über 100 um $xx-109$.
Die gesuchte Zahl x aber ist unter 23 um $23-x$; woraus diese Gleichung entsteht $xx-109=23-x$
Man addire 109 so wird $xx=-x+132$ folglich nach der Regel $x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+132)}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{529}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{23}{2}$
Also ist entweder $x=11$, oder $x=-12$

Antwort: Wenn nur eine positive Antwort verlangt wird, so ist die gesuchte Zahl 11 deren Quadrat weniger 9 macht 112, so um 12 größer ist als 100, und die gefundene Zahl 11 ist um eben so viel kleiner als 23.

86.

III. Frage: Suche eine Zahl wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multiplicire und zum Product $\frac{1}{2}$ der gefundenen Zahl addire, daß 30 kommen?

Es sey diese Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}xx$ giebt; also soll $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x=30$ seyn; mit 6 multiplicirt, wird $xx+3x=180$, oder $xx=-3x+180$, woraus man findet

$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$
Daher ist entweder $x = 12$ oder $x = -15$.

87.

IV. Frage: Suche zwey Zahlen in Proportione Dupla, wenn ich ihre Summe zu ihrem Product addire daß 90 komme?

Es sey die Zahl x, so ist die größere 2x, ihr Product 2xx, dazu ihre Summe 3x addirt soll geben 90. Also $2xx + 3x = 90$, und 3x subtrahirt,
$2xx = -3x + 90$
durch 2 dividirt, giebt $xx = -\frac{3}{2}x + 45$; woraus nach der Regel gefunden wird $x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} + 45)}$
$= -\frac{3}{4} \pm \frac{27}{4}$.
Daher ist entweder $x = 6$ oder $x = -7\frac{1}{2}$.

88.

V. Frage: Einer kauft ein Pferd für etliche Rthl. verkauft dasselbe wieder für 119 Rthl. und gewinnt daran von 100 so viel Rthl. als das Pferd gekostet, ist die Frage wie theuer dasselbe eingekauft worden?

Daß Pferd habe gekostet x Rthl. weil er nun darauf x Proc. gewonnen, so setze man, mit 100 gewinnt man x, wie viel mit x? Antwort $\frac{xx}{100}$. Da er nun $\frac{xx}{100}$ gewonnen, der Einkauf aber x gewesen, so muß er dasselbe für $x + \frac{xx}{100}$ verkauft haben. Dahero wird $x + \frac{xx}{100} = 119$.

Man subtrahire x, so kommt $\frac{xx}{100} = -x + 119$
und mit 100 multiplicirt, wird $xx = -100x + 11900$,
woraus nach der Regel gefunden wird
$x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50 \pm \sqrt{14400}$
$= -50 \pm 120$.

Antwort:

Antwort: das Pferd hat also gekostet 70 Rthl. weil er nun darauf 70 Procent gewonnen, so war der Gewinnst 49 Rthl. er muß also dasselbe verkauft haben vor 70 + 49, das ist für 119 Rthl. wie wirklich geschehen.

89.

VI. Frage: Einer kauft eine gewisse Anzahl Tücher: das erste für 2 Rthl. das zweyte für 4 Rthl. das dritte für 6 Rthl. und immer 2 Rthl. mehr für das folgende, bezahlt für alle Tücher 110 Rthl. Wie viel sind der Tücher gewesen?

Es seyn x Tücher gewesen, und wie viel er für jedes bezahlt hat, zeiget die folgende Vorstellung an:

für das 1, 2, 3, 4, 5 . . . x
zahlt er 2, 4, 6, 8, 10 . . . 2x Rthl.

Man muß also diese Arithmetische Progression $2+4+6+8+10+\ldots.2x$ welche aus x Gliedern besteht summiren, um den Preiß aller Tücher zusammen zu finden.

Nach der oben gegebenen Regel also addire man das erste und letzte Glied zusammen, so bekommt man $2x+2$. Dieses multiplicire man mit der Anzahl der Glieder x, so bekommt man die doppelte Summe $2xx+2x$. Daher die Summe selbst seyn wird $xx+x$, welche dem 110 gleich seyn muß, oder $xx+x=110$

Man subtrahire x, so wird $xx=-x+110$

folglich $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+110)}$ oder $=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{441}{4}}$

oder $x=-\frac{1}{2}+\frac{21}{2}=10$

Antwort: Es sind 10 Stück Tücher gekauft worden.

90.

VII. Frage: Einer kauft etliche Tücher für 180 Rthl. wären der Tücher 3 mehr gewesen vor eben das Geld, so wäre ihm das Stück um 3 Rthl. wohlfeiler gekommen. Wie viel sind es Tücher gewesen?

Es seyn x Tücher gewesen, so hat das Stück wirklich gekostet $\frac{180}{x}$ Rthl. Hätte er aber $x+3$ Stück für 180 Rthl. bekommen, so würde das Stück gekostet haben $\frac{180}{x+3}$ Rthl. welcher Preis um 3 Rthl. weniger ist, als der wirkliche, woraus diese Gleichung entsteht:

$$\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$$

man multiplicire mit x, so kommt $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$

durch 3 dividirt, giebt $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$

mit $x+3$ multiplicirt, wird $60x = 180 + 57x - xx$
man addire xx, so kommt $xx + 60x = 180 + 57x$.
Man subtrahire 60x, so kommt $xx = -3x + 180$. Hieraus nach der Regel

$x = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)}$, oder $x = -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12$.

Antwort: Also sind 12 Tücher für 180 Rthl. gekauft worden, daher eines gekostet 15 Rthl. Hätte man aber 3 Stück mehr nämlich 15 Stück für 180 Rthl. bekommen, so wird 1 Stück gekostet haben 12 Rthl., folglich 3 Rthl. weniger als in der That.

91.

VIII. Frage: Zwey haben eine Gesellschaft, legen zusammen 100 Rthl. ein, der erste läßt sein Geld 3 Monath lang, der andere aber 2 Monath lang stehen, und zieht ein jeder mit Capital und Gewinnst 99 Rthl. wie viel hat jeder eingelegt?

Der erste habe eingelegt x Rthl. und also der andere $100 - x$: da nun der erste 99 Rthl. zurück zieht, so ist sein Gewinn $99 - x$, welcher in 3 Monathen mit

dem

dem Capital x ist erworben worden, da der andere auch 99 Rthl. zurück zieht, so war sein Gewinn x−1, welcher in zwey Monathen mit dem Capital 100 − x erworben worden: mit eben diesem Capital 100 − x würden also in 3 Monathen gewonnen werden $\frac{3x-3}{2}$.

Nun sind diese Gewinnste denen Capitalen proportional, nämlich jenes Capital verhält sich zu jenem Gewinnst, wie dieses Capital zu diesem Gewinnst; also

$$x : 99 - x = 100 - x : \frac{3x-3}{2}$$

Man setze das Product der äußern gleich dem Product der mittlern, so hat man $\frac{3xx-3x}{2} = 9900 - 199x + xx$

und mit 2 multiplicirt $3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx$; man subtrahire $2xx$ so kommt $xx - 3x = 19800 - 398x$ und $3x$ addirt $xx = -395x + 19800$. Daher nach der Regel $x = -\frac{395}{2} + \sqrt{(\frac{156025}{4} + \frac{79200}{4})}$ das ist $x = -\frac{395}{2} + \frac{485}{2} = \frac{90}{2} = 45$.

Antwort: der erste hat also eingelegt 45 Rthl. und der andere 55 Rthl. mit den 45 Rthl. hat der erste in 3 Monath gewonnen 54 Rthl. würde demnach in einem Monath gewonnen haben 18 Rthl. Der andere aber gewinnt mit 55 Rthl. in 2 Monath 44 Rthl. würde also in einem Monath gewonnen haben 22 Rthl. welches auch mit jenem übereinstimmt; denn wenn mit 45 Rthl. gewonnen werden 18 in einem Monath, so werden mit 55 in gleicher Zeit gewonnen 22 Rthl.

92.

IX. Frage: Zwey Bäurinnen tragen zusammen 100 Eyer auf den Markt, eine mehr wie die andere, und lösen doch beyde gleich viel Geld: Spricht die erste zu der andern, hätte ich deine Eyer gehabt, so

hätte ich 15 Kreuzer gelöst: darauf antwortet die andere, hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreuzer gelöst: wie viel hat jede gehabt?

Die erste habe gehabt x Eyer und also die andere $100 - x$.

Also da nun die erste $100 - x$ Eyer für 15 Kreuzer verkauft haben würde, so setze man diese Regel detrie

$100 - x : 15 = x$ zur Antwort $\frac{15x}{100-x}$ Kreuzer.

Eben so bey der andern welche x Eyer für $6\frac{2}{3}$ Kreuzer verkauft haben würde, findet man wie viel sie aus ihren $100 - x$ Eyer gelöset, $x : \frac{20}{3} = 100 - x$ zur Antwort $\frac{2000-20x}{3x}$. Da nun die beyden Bäurinnen gleich viel gelöset haben, so finden wir diese Gleichung:

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x}$$

mit $3x$ multiplicirt, kommt $2000 - 20x = \frac{45xx}{100-x}$

mit $100 - x$ multiplicirt,

$45xx = 200000 - 4000x + 20xx$

$20xx$ subtrahirt, $25xx = 200000 - 4000x$

durch 25 dividirt $xx = -160x + 8000$: daher nach der Regel

$x = -80 + \sqrt{(6400 + 8000)} = -80 + 120 = 40$.

Antwort: die erste Bäurinn hat also gehabt 40 Eyer, die andere 60 Eyer und hat eine jede 10 Kreuzer gelöset.

93.

X. Frage: Zwey verkaufen etliche Ellen Zeug, der andere 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Rthl. Spricht der erste zum andern: aus deinem Zeuge wollt ich gelöset haben 24 Rthl.

ant-

antwortet der andere, so hätte ich aus deinem gelöset $12\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel hat jeder Ellen gehabt?

Der erste habe gehabt x Ellen, folglich der andere $x + 3$ Ellen. Da nun der erste aus $x + 3$ El. 24 Rthl. gelöset hätte, so muß er seine x Ellen verkauft haben vor $\frac{24x}{x+3}$ Rthl. und da der andere x Ellen verkauft hätte für $12\frac{1}{2}$ Rthl. so hätte er seine $x + 3$ Ellen verkauft vor $\frac{25x + 75}{2x}$; und so haben beyde zusammen gelöset

$$\frac{24x}{x+3} + \frac{25x+75}{2x} = 35 \text{ Rthl.}$$

$$\text{Also } \frac{48xx}{x+3} + 25x + 75 = 70x,$$

$$\text{oder } \frac{48xx}{x+3} = 45x - 75, \text{ mit } x + 3 \text{ multiplicirt wird,}$$

$48xx = 45xx + 60x - 225$, subtrahirt $45xx$, so hat man $3xx = 60x - 225$, oder $xx = 20x - 75$.

Hieraus wird $x = 10 \pm r\,(100 - 75) = 10 \pm r\,25$, also $x = 10 \pm 5$.

Antwort: Es giebt daher zwey Auflösungen. Nach der ersten hat der erste 15 Ellen, und der andere 18 Ellen: weil nun der erste 18 Ellen verkauft hat vor 24 Rthl. so hat er aus seinen 15 Ellen gelöst 20 Rthl. Der andere aber hätte aus 15 Ellen gelöset $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 18 Ellen gelöst 15 Rthl. also beyde zusammen 35 Rthl.

Nach der andern Auflösung hat der erste gehabt 5 Ellen, folglich also der andere 8 Ellen, also der erste hätte verkauft 8 Ellen für 24 Rthl. und hat also aus seinen 5 Ellen gelöset 15 Rthl. Der andere hätte 5 Ellen verkauft für $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 8 Ellen gelöset 20 Rthl. folglich beyde zusammen eben wieder 35 Rthl.

Capitel 7.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckigten Zahlen.

94.

Wir haben oben gezeigt, wie die vieleckigten Zahlen gefunden werden sollen: was wir aber daselbst eine Seite genennt haben, wird auch eine Wurzel genennt. Wenn nun die Wurzel durch x angedeutet wird, so werden daraus die vieleckigten Zahlen folgender Gestalt gefunden:

Das 3eck ist $\frac{xx+x}{2}$

" " 4eck " " xx

" " 5eck " " $\frac{3xx-x}{2}$

" " 6eck " " $2xx-x$

" " 7eck " " $\frac{5xx-3x}{2}$

" " 8eck " " $3xx-2x$

" " 9eck " " $\frac{7xx-5x}{2}$

" " 10eck " " $4xx-3x$

" " neck " " $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$

95. Durch

95.

Durch Hülfe dieser Formeln ist es nun leicht für eine jede gegebene Seite, oder Wurzel, eine verlangte vieleckigte Zahl so groß auch die Zahl der Ecke seyn mag zu finden, wie schon oben genugsam gezeigt worden. Wenn aber umgekehrt eine vieleckigte Zahl von einer gewissen Anzahl Seite gegeben ist, so ist es weit schwerer die Wurzel oder Seite davon zu finden, und wird dazu die Auflösung quadratischer Gleichungen erfordert, daher diese Sache allhier besonders verdienet abgehandelt zu werden. Wir wollen hiebey der Ordnung nach von den dreyeckigten Zahlen anfangen, und zu den mehreckigten fortschreiten.

96.

Es sey demnach 91 die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man nun diese Wurzel $= x$ so muß $\frac{xx+x}{2}$ der Zahl 91 gleich seyn: man multiplicire mit 2, so hat man $xx + x = 182$, woraus gefunden wird $xx = -x + 182$, und also $x = -\frac{1}{2} + r(\frac{1}{4} + 182) = -\frac{1}{2} + r\,\frac{729}{4}$ folglich $x = -\frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 13$; daher ist die verlangte Dreyeckswurzel $= 13$, denn das Dreyeck von 13 ist 91.

97.

Es sey aber auf eine allgemeine Art a die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Wurzel gefunden werden soll.

Setzt man dieselbe $= x$, so wird $\frac{xx+x}{2} = a$, oder $xx + x = 2a$, oder ferner $xx = -x + 2a$, woraus gefun-

funden wird $x = -\frac{1}{2} + r\left(\frac{1}{4} + 2a\right)$, oder $x = -\frac{1 + r(8a+1)}{2}$.

Hieraus entspringt diese Regel. Man multiplicire die gegebene dreyeckigte Zahl mit 8, und zum Product addire 1, aus der Summe ziehe man die Quadratwurzel, von derselben subtrahire 1; den Rest dividire durch 2, so kommt die gesuchte Dreyeckswurzel heraus.

98.

Hieraus sieht man, daß alle dreyeckigte Zahlen diese Eigenschaft haben, daß wenn man dieselben mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt immer eine Quadratzahl herauskommen müsse, wie aus folgendem Täfelchen zu ersehen,

III. Eck. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ꝛc.
8 mahl +1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529, ꝛc.

Ist nun die gegebene Zahl a nicht so beschaffen, so ist es ein Zeichen, daß dieselbe keine wirkliche dreyeckigte Zahl sey, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden könne.

99.

Man suche nach dieser Regel die Dreyeckswurzel aus der Zahl 210, so ist $a = 210$ und $8a + 1 = 1681$, wovon die Quadratwurzel 41, woraus man sieht, daß die Zahl 210 wirklich eine dreyeckigte Zahl ist, wovon die Wurzel $= \frac{41 - 1}{2} = 20$.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreyeck gegeben, wovon die Wurzel gesucht werden sollte, so wäre dieselbe $= \frac{r\,33 - 1}{2}$ und also irrational: Es wird aber auch wirk-

lich

lich von dieser Wurzel, nämlich $\frac{r\,33-1}{2}$, das Dreyeck gefunden, wie folget.

Da $x = \frac{r\,33-1}{2}$, so ist $xx = \frac{17-r\,33}{2}$; darzu x addirt, wird $xx + x = \frac{16}{2} = 8$, und folglich die dreyeckigte Zahl $\frac{xx+x}{2} = 4$.

100.

Da die viereckigten Zahlen mit den Quadraten einerley sind, so hat die Sache keine Schwierigkeit. Denn setzt man die gegebene viereckigte Zahl = a und ihre Viereckswurzel = x, so wird $xx = a$ und also $x = r\,a$. Also daß die Quadratwurzel und Viereckswurzel einerley sind.

101.

Wir wollen demnach zu den fünfeckigten Zahlen fortschreiten.

Es sey nun 22 eine fünfeckigte Zahl, und die Wurzel derselben = x, so muß seyn $\frac{3xx-x}{2} = 22$, oder $3xx - x = 44$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + r\,(\frac{1}{36} + \frac{44}{3})$, das ist $x = \frac{1+r\,(529)}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4$.

Also ist 4 die gesuchte Fünfeckswurzel aus der Zahl 22.

102.

Es sey nun vorgelegt diese Frage: wenn das gegebene Fünfeck = a ist, wie soll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt

Setzt man diese gesuchte Wurzel = x, so kommt man auf diese Gleichung $\frac{3xx-x}{2} = a$, oder $3xx - x = 2a$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + r\left(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3}\right)$, das ist $x = \frac{1+r(24a+1)}{6}$.

Wenn daher a ein wirkliches Fünfeck ist, so muß 24a + 1 immer eine Quadratzahl seyn.

Es sey z. E. 330 das gegebene Fünfeck, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+r\,7921}{6} = \frac{1+89}{6} = 15$.

103.

Es sey nun a eine gegebene sechseckigte Zahl, wovon die Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel = x, so wird $2xx - x = a$, oder $xx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, daher gefunden wird $x = \frac{1}{4} + r\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}a\right) = \frac{1+r(8a+1)}{4}$. Wenn also a ein wirkliches Sechseck ist, so muß 8a + 1 ein Quadrat werden, woraus man sieht, daß alle sechseckigte Zahlen unter den dreyeckigten begriffen sind; die Wurzeln aber sind anders beschaffen.

Es sey z. E. die sechseckigte Zahl 1225, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+r\,9801}{4} = \frac{1+99}{4} = 25$.

104.

Es sey ferner a eine gegebene siebeneckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll:

Setzt

Setzt man diese Wurzel = x, so hat man $\frac{5xx-3x}{2}$ = a, oder 5 xx − 3 x = 2a, also $xx = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}a$, woraus gefunden wird $x = \frac{3}{10} + r(\frac{9}{100} + \frac{2}{5}a) = \frac{3+r(40a+)}{10}$.

Alle siebeneckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß, wenn man dieselben mit 40 multiplicirt und zum Product 9 addirt, die Summe immer Quadratzahlen werden.

Es sey z. E. das gegebene Siebeneck 2059, so findet man die Wurzel davon $x = \frac{3+r(82369)}{10} = \frac{3+287}{10} = 29$.

105.

Es sey nun a eine gegebene achteckigte Zahl, wovon die Wurzel x gefunden werden soll.

Man hat daher 3 xx − 2x = a, oder $xx = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$, woraus gefunden wird $x = \frac{1}{3} + r(\frac{1}{9} + \frac{a}{3}) = \frac{1+r(3a+1)}{3}$. Alle achteckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wenn man sie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt die Summe immer eine Quadratzahl werde.

Es sey z. E. 3816 eine achteckigte Zahl, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+r.11449}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$.

106.

Es sey endlich a eine gegebene n eckigte Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll, so hat man diese Gleichung.

$$\frac{(n-2)\,xx-(n-4)\,x}{2} = a, \text{ oder } (n-2)\,xx-(n-4)\,x=2a,$$

also:

$$xx = \frac{(n-4)\,x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}, \text{ woraus gefunden wird}$$

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + r\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right), \text{ oder}$$

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + r\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8.(n-2)a}{4.(n-2)^2}\right) \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{n-4+r\,(8.(n-2)\,a+(n-4)^2)}{2.(n-2)}.$$

Welche Formel eine allgemeine Regel enthält um aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckigte Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey gegeben diese 24eckigte Zahl 3009; weil nun hier $a = 3009$ und $n = 24$, folglich $n - 2 = 22$ und $n - 4 = 20$, so bekommen wir die Wurzel

$$x = \frac{20+r\,(529584+400)}{44} = \frac{20+728}{44} = 17.$$

Capi=

Capitel 8.

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Binomien.

107.

Ein Binomium wird in der Algebra genennt eine aus zwey Theilen bestehende Zahl, wovon eine oder auch beyde das quadratische Wurzel-Zeichen enthalten.

Also ist $3 + \sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8} + \sqrt{3}$, und es ist gleich viel ob diese beyden Theile mit dem Zeichen + oder − verbunden sind. Daher wird $3 - \sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genennt als $3 + \sqrt{5}$.

108.

Diese Binomien sind deswegen hauptsächlich merkwürdig, weil man bey Auflösung der quadratischen Gleichungen jedesmahl auf solche Formeln kommt, so oft die Auflösung nicht geschehen kann.

Also wenn z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 6x - 4$, so wird denn $x = 3 + \sqrt{5}$. Um dieser Ursache willen kommen nun solche Formeln in den Algebraischen Rechnungen sehr häufig vor, und wir haben auch schon oben gezeiget, wie damit die gewöhnliche Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division angestellt werden sollen. Nun aber sind wir erst im Stande zu zeigen, wie aus solchen Formeln auch die Quadratwurzeln ausgezogen werden können, wofern nämlich eine solche Ausziehung statt findet, indem wiedrigenfalls nur noch ein Wurzelzeichen vorgesetzt wird, nämlich von $3 + \sqrt{2}$ ist die Quadratwurzel $\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$.

109.

Man hat demnach zuförderst zu bemerken, daß die Quadrate von solchen Binomien wiederum dergleichen Binomien werden, in welchen so gar der eine Theil rational ist.

Denn sucht man das Quadrat von $a + \sqrt{b}$, so wird dasselbe $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$. Wenn also von dieser Formel $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$ hinwiederum die Quadratwurzel verlangt würde, so wäre dieselbe $2 + \sqrt{b}$, welche ohnstreitig deutlicher zu begreifen ist, als wenn man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte. Eben so, wenn man von dieser Formel $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ das Quadrat nimmt, so wird dasselbe $(a+b) + 2\sqrt{ab}$, daher auch umgekehrt von dieser Formel $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ die Quadratwurzel seyn wird $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, welche wiederum verständlicher ist, als wenn man vor jene noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte.

110.

Es kommt daher darauf an, wie ein Kennzeichen zu erfinden sey, woraus in einem jeglichen Fall beurtheilet werden kann, ob eine solche Quadratwurzel statt finde oder nicht. Wir wollen zu diesem Ende mit einer leichten Formel den Anfang machen, und sehen, ob man aus diesem Binomio $5 + 2\sqrt{6}$ solcher Gestalt die Quadratwurzel finden könne:

Man setze also diese Wurzel sey $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, wovon das Quadrat $(x+y) + 2\sqrt{xy}$ ist, also muß dieses Quadrat jener Formel $5 + 2\sqrt{6}$ gleich seyn; folglich der rationale Theil $x + y$ muß gleich seyn 5 und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß gleich seyn $2\sqrt{6}$; daher bekommt man $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$, und die Quadrate genommen $xy = 6$. Da nun $x + y = 5$, so wird hieraus $y = 5 - x$ welcher Werth in der Gleichung $xy = 6$ gesetzt, giebt $5x - xx = 6$ oder $xx = 5x - 6$, daher $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} - \frac{24}{4})} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} =$

$+\frac{1}{2} = 3$; also $x = 3$ und $y = 2$, folglich wird aus $5 + 2\sqrt{6}$ die Quadratwurzel seyn $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

III.

Da wir hier diese beyde Gleichungen erhalten haben, I.) $x + y = 5$, und II.) $xy = 6$, so wollen wir hier einen besondern Weg anzeigen, um daraus x und y zu finden, welcher darinn besteht:

Da $x + y = 5$, so nehme man die Quadraten $xx + 2xy + yy = 25$: Nun bemerke man, daß $xx - 2xy + yy$ das Quadrat von $x - y$ ist; man subtrahire daher von jener Gleichung nämlich von $xx + 2xy + yy = 25$, diese $xy = 6$ vier mal genommen, oder $4xy = 24$, so erhält man $xx - 2xy + yy = 1$, und hieraus die Quadratwurzel $x - y = 1$, so wird, weil $x + y = 5$ ist, gefunden $x = 3$ und $y = 2$. Daher die gesuchte Quadratwurzel von $5 + 2\sqrt{6}$ seyn wird $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

112.

Laßt uns dieses allgemeine Binomium $a + \sqrt{b}$ betrachten, und die Quadratwurzel davon $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ setzen, so erhalten wir diese Gleichung $(x + y) + 2\sqrt{xy} = a + \sqrt{b}$, also $x + y = a$ und $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$ oder $4xy = b$: von jener ist das Quadrat $xx + 2xy + yy = aa$, wovon diese $4xy = b$ subtrahirt, giebt $xx - 2xy + yy = aa - b$, und wovon die Quadratwurzel ist $x - y = \sqrt{(aa - b)}$. Da nun $x + y = a$, so finden wir $x = \frac{a + \sqrt{(aa-b)}}{2}$ und $y = \frac{a - \sqrt{(aa-b)}}{2}$ daher die verlangte Quadratwurzel aus $a + \sqrt{b}$ seyn wird: $\frac{\sqrt{a + \sqrt{(aa-b)}}}{2} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{(aa-b)}}{2}}$.

113.

Diese Formel ist allerdings verwirrter, als wenn man für das gegebene Binomium $a + \sqrt{} b$ schlecht weg das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ gesetzt hätte, nämlich $\sqrt{}(a + \sqrt{} b)$. Allein jene Formel kann weit leichter werden, wenn die Zahlen a und b so beschaffen sind, daß $aa - b$ ein Quadrat wird, weil alsdenn das $\sqrt{}$ hinter dem $\sqrt{}$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in solchen Fällen aus dem Binomio $a + \sqrt{} b$ die Quadratwurzel bequem ausziehen könne, wenn $aa - b = cc$, denn alsdenn wird die gesuchte Quadratwurzel seyn $\sqrt{}\frac{a+c}{2} + \sqrt{}\frac{a-c}{2}$; wenn aber $aa - b$ keine Quadratzahl ist, so läßt sich die Quadratwurzel nicht füglicher anzeigen, als durch Vorsetzung des $\sqrt{}$ Zeichens.

114.

Daher erhalten wir diese Regel um aus einem Binomio $a + \sqrt{} b$ die Quadratwurzel auf eine bequemere Art auszudrücken. Hierzu wird nämlich erfodert, daß $aa - b$ eine Quadratzahl sey: ist nun dieselbe $= cc$, so wird die verlangte Quadratwurzel seyn $\sqrt{}\frac{a+c}{2} + \sqrt{}\frac{a-c}{2}$; wobey noch anzumerken, daß von $a - \sqrt{} b$ die Quadratwurzel seyn werde $\sqrt{}\frac{a+c}{2} - \sqrt{}\frac{a-c}{2}$.

Denn nimmt man von dieser Formel das Quadrat, so wird solches $a - 2\sqrt{}\frac{aa - cc}{4}$; da nun $cc = aa - b$, so ist $aa - cc = b$: daher dieses Quadrat $= a - 2\sqrt{}\frac{b}{4} = a - \frac{2\sqrt{} b}{2} = a - \sqrt{} b$.

115. Wenn

115.

Wenn also aus einem solchen Binomio $a + \sqrt{b}$ die Quadratwurzel gezogen werden soll, so subtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils aa das Quadrat des irrationalen Theils b: aus dem Rest ziehe man die Quadratwurzel, welche $= c$ sey, so ist die verlangte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

116.

Man suche die Quadratwurzel aus $2 + \sqrt{3}$, so ist $a = 2$ und $b = 3$; daher $aa - b = cc = 1$, und also $c = 1$: daher die verlangte Quadratwurzel ist $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es sey ferner dieses Binomium gegeben $11 + 6\sqrt{2}$, woraus die Quadratwurzel gefunden werden soll. Hier ist nun $a = 11$ und $\sqrt{b} = 6\sqrt{2}$; daher $b = 36.2 = 72$ und $aa - b = 49$, folglich $c = 7$. Daher die Quadratwurzel aus $11 + 6\sqrt{2}$ seyn wird $\sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$.

Man suche die Quadratwurzel aus $11 - 2\sqrt{30}$: Hier ist $a = 11$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{30}$, daher $b = 4.30 = 120$ und $aa - b = 1$ und $c = 1$: folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

117.

Diese Regel findet auch statt, wenn so gar imaginäre, oder unmögliche Zahlen, vorkommen.

Wenn also gegeben ist dieses Binomium $1 + 4\sqrt{-3}$, so ist $a = 1$ und $\sqrt{b} = 4\sqrt{-3}$; daher $b = -48$ und $aa - b = 49$. Daher $c = 7$ folglich die gesuchte Quadratwurzel $\sqrt{4} + \sqrt{-3} = 2 + \sqrt{-3}$.

Es sey ferner gegeben $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier ist $a = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b = \frac{1}{4}.-3 = -\frac{3}{4}$ daher $aa - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ und $c = 1$: folglich die ge-

suchte Quadratwurzel $r\frac{1}{4} + r - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{r-3}{2}$

oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r - 3$.

Noch ist merkwürdig dieses Exempel, wo aus $2r - 1$ die Quadratwurzel gesucht werden soll.

Weil hier kein rationaler Theil ist, so ist $a = 0$ und $r\, b = 2r - 1$, daher $b = -4$ und $aa - b = 4$, also $c = 2$, woraus die gesuchte Quadratwurzel ist $r1 + r - 1 = 1 + r - 1$, wovon das Quadrat ist $1 + 2r - 1 - 1 = 2r - 1$.

118.

Sollte auch eine solche Gleichung aufzulösen vorfallen wie, $xx = a \pm r\, b$ und es wäre $aa - b = cc$, so würde man daraus diesen Werth für x erhalten $x = r\frac{a+c}{2} \pm r\frac{a-c}{2}$ welches in vielen Fällen Nutzen haben kann.

Es sey z. E. $xx = 17 + 12\, r\, 2$, so wird $x = 3 + r\, 8 = 3 + 2\, r\, 2$.

119.

Dieses findet insonderheit statt bey Auflösung einiger Gleichungen vom vierten Grad, als $x^4 = 2axx + d$. Denn setzt man hier $xx = y$ so wird $x^4 = yy$, daher unsere Gleichung $yy = 2ay + d$, woraus gefunden wird $y = a \pm r\,(aa + d)$: daher für die erste Gleichung seyn wird $xx = a \pm r\,(aa + d)$, woraus folglich noch die Quadratwurzel gezogen werden muß. Da nun hier $r\, b = r\,(aa + d)$ also $b = aa + d$, so wird $aa - b = -d$. Wäre nun $-d$ ein Quadrat nämlich cc oder $d = -cc$, so kann die Wurzel angezeigt werden; es sey demnach $d = -cc$, oder es sey diese Gleichung vom vierten Grad vorgegeben $x^4 = 2axx - cc$,

so

so wird daraus der Werth von x also ausgedrückt $x = r\frac{a+c}{2} \pm r\frac{a-c}{2}$.

120.

Wir wollen dieses durch einige Exempel erläutern;

I. Erstlich suche man zwey Zahlen, deren Product sey 105, und wenn man ihre Quadraten zusammen addirt, so sey die Summe = 274?

Man setze diese Zahlen seyn x und y, so hat man sogleich diese zwey Gleichungen I.) $xy = 105$ und II.) $xx + yy = 274$.

Aus der ersten findet man $y = \frac{105}{x}$ welcher Werth in der andern vor y gesetzt, giebt $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Mit xx multiplicirt wird: $x^4 + 105^2 = 274\,xx$, oder $x^4 = 274\,xx - 105^2$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen, so wird $2a = 274$ und $-cc = -105^2$; daher $c = 105$ und $a = 137$. Also finden wir:

$$x = r\frac{137+105}{2} \pm r\frac{137-105}{2} = 11 \pm 4:$$

folglich entweder $x = 15$, oder $x = 7$. Im erstern Fall wird $y = 7$, im letztern aber $y = 15$. Daher die beyden gesuchten Zahlen sind 15 und 7.

121.

Es ist hier aber gut zu bemerken, daß die Rechnung weit leichter gemacht werden kann. Denn da $xx + 2xy + yy$, und auch $xx - 2xy + yy$ ein Quadrat ist, wir aber wissen was so wohl $xx + yy$ als xy ist, so dürfen wir nur das letztere doppelt genom-

men, so wohl zu dem ersten addiren, als auch davon subtrahiren, wie hier zu sehen:
$xx + yy = 274$. Erstlich $2xy = 210$ addirt
$xx + 2xy + yy = 484$ und $x + y = 22$
darnach $2xy$ subtrahirt giebt $xx - 2xy + yy = 64$
und $x - y = 8$.
Also $2x = 30$ und $2y = 14$, woraus erhellet daß $x = 15$ und $y = 7$. Auf diese Art kann auch diese allgemeine Frage aufgelöset werden.

II. Man suche zwey Zahlen, davon das Product $= m$, und die Summe ihrer Quadraten $= n$?
Die gesuchten Zahlen seyn x und y, so hat man die beyden folgenden Gleichungen I.) $xy = m$, II.) $xx + yy = n$. Nun aber ist $2xy = 2m$, woraus erstlich $2xy$ addirt wird $xx + 2xy + yy = n + 2m$ und $x + y = r(n + 2m)$
hierauf $2xy$ subtrahirt giebt $xx - 2xy + yy = n - 2m$ und $x - y = r(n - 2m)$
also $x = \frac{1}{2} r(n + 2m) + \frac{1}{2} r(n - 2m)$ und $y = \frac{1}{2} r(n + 2m) - \frac{1}{2} r(n - 2m)$.

122.

III. Es sey ferner diese Frage vorgelegt: man suche zwey Zahlen, deren Product $= 35$ und die Differenz ihrer Quadraten $= 24$?

Es sey x die größere, und y die kleinere, so hat man diese beyde Gleichungen $xy = 35$ und $xx - yy = 24$, da nun hier die vorigen Vortheile nicht statt finden, so verfahre man nach der gewöhnlichen Weise, und da giebt die erste $y = \frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für x gesetzt, giebt $xx - \frac{1225}{xx} = 24$, mit xx multiplicirt, so hat man $x^4 - 1225 = 24xx$ und $x^4 = 24xx + 1225$.

+1225. Weil hier das letzte Glied das Zeichen plus hat, so kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nämlich $cc = -1225$, und also c imaginär würde.

Man setze daher $xx = z$, so hat man $zz = 24z + 1225$ woraus gefunden wird $z = 12 \pm r(144 + 1225)$ oder $z = 12 \pm 37$ daher $xx = 12 \pm 37$, das ist entweder $xx = 49$ oder $xx = -25$.

Nach dem ersten Werth wird $x = 7$ und $y = 5$

Nach dem andern aber wird $x = r - 25$ und $y = \frac{35}{r - 25}$,

oder $y = r\frac{1225}{-25}$, oder $y = r - 49$.

123.

Zum Beschluß dieses Capitels wollen wir noch diese Frage beyfügen:

IV. Man suche zwey Zahlen, deren Summe, Product, und die Differenz ihrer Quadraten einander gleich seyn?

Die größere Zahl sey x, die kleinere y, so müssen diese drey Formeln einander gleich seyn: I.) Summe $x + y$, II.) Product xy, III.) Differenz der Quadraten $xx - yy$. Vergleicht man die erste mit der zweyten, so hat man $x + y = xy$ und daraus suche man x. Man wird also haben $y = xy - x$ oder $y = x(y - 1)$ und daraus wird $x = \frac{y}{y-1}$; daher wird $x + y = \frac{yy}{y-1}$

und $xy = \frac{yy}{y-1}$ und also ist die Summe dem Product schon gleich. Diesem muß aber noch die Differenz der Quadraten gleich seyn: es wird aber $xx - yy = \frac{yy}{yy-2y+1} - yy = \frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$ welches dem obigen

Werth

Werth $\frac{yy}{y-1}$ gleich seyn muß; daher bekommt man $\frac{yy}{y-1} = \frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^4}$; durch yy dividirt wird $\frac{1}{y-1} = \frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$; ferner mit $y-1$ multiplicirt wird $1 = \frac{-yy+2y}{y-1}$ nochmals mit $y-1$ multiplicirt giebt $y-1 = -yy+2y$: folglich $yy = y+1$. Hieraus findet man $y = \frac{1}{2} \pm r(\frac{1}{4}+1)$ $= \frac{1}{2} \pm r\frac{5}{4}$ oder $y = \frac{1+r5}{2}$: und daher erhalten wir $x = \frac{1+r5}{r5-1}$. Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, so multiplicirt man oben und unten mit $r5+1$, so bekommt man $x = \frac{6+2r5}{4} = \frac{3+r5}{2}$.

Antwort: Also die größere der gesuchten Zahlen $x = \frac{3+r5}{2}$, und die kleinere $y = \frac{1+r5}{2}$. Ihre Summe ist also $x+y = 2+r5$, ferner das Product $xy = 2+r5$, und da $xx = \frac{7+3r5}{2}$ und $yy = \frac{3+r5}{2}$ so wird die Differenz der Quadraten $xx-yy = 2+r5$.

124.

Weil diese Auflösung ziemlich mühsam war, so kann dieselbe leichter gefunden werden; man setze erstlich die Summe $x+y$, der Differenz der Quadraten $xx-yy$ gleich, so hat man $x+y = xx-yy$. Hier kann man durch $x+y$ dividiren weil $xx-yy = (x+y)(x-y)$, und da erhält man $1 = x-y$ woraus $x = y+1$; daher $x+y = 2y+1$ und $xx-yy = 2y+1$;

$=2y+1$; und diesem muß noch gleich seyn das Product $x\,y = yy + y$. Man hat also $yy+y=2y+1$, oder $yy = y + 1$, woraus wie oben gefunden wird

$$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

125.

V. Dieses leitet uns noch auf folgende Frage. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Product und die Summe ihrer Quadraten einander gleich seyn?

Die gesuchten Zahlen seyn x und y, so müssen diese drey Formeln einander gleich seyn I.) $x+y$, II.) xy, und III.) $xx+yy$.

Setzt man die erste der zweyten gleich $x+y=xy$, so findet man daraus $x=\frac{y}{y-1}$ und $x+y=\frac{yy}{y-1}$, welchem auch xy gleich ist. Hieraus aber wird $xx+yy$ $=\frac{yy}{yy-2y+1}+yy$, welches dem $\frac{yy}{y-1}$ gleich zu setzen: Man multiplicire mit $yy-2y+1$ so bekommt man $y^4-2y^3+2yy=y^3-yy$ oder $y^4=3y^3-3yy$, und durch yy dividirt $yy=3y-3$; daher $y=\frac{3}{2}$ $\pm\sqrt{(\frac{9}{4}-3)}$, also $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ daher $y-1=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, folglich $x=\frac{3+\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Man multiplicire oben und unten mit $1-\sqrt{-3}$, so wird $x=\frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$ oder $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$.

Antwort: also sind die beyden gesuchten Zahlen $x=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ und $y=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, ihre Summe ist $x+y$

$=3$, das Product $xy=3$, und da endlich $xx=\frac{3-3r-3}{2}$ und $yy=\frac{3+3r-3}{2}$, so wird $xx+yy=3$.

126.

Diese Rechnung kann durch einen besondern Vortheil nicht wenig erleichtert werden, welches noch in andern Fällen statt findet. Derselbe bestehet darinn, daß man die gesuchte Zahlen nicht durch einzelne Buchstaben, sondern durch die Summe und Differenz zweyer andern ausdrückt.

Also bey der vorigen Aufgabe setze man die eine der gesuchten Zahlen gleich $p+q$ und die andere $p-q$, so wird die Summe derselben seyn $2p$, ihr Product $pp-qq$ und die Summe ihrer Quadraten $2pp+2qq$ welche drey Stück einander gleich seyn müssen. Man setze das erste gleich dem zweyten so wird $2p=pp-qq$ und daraus $qq=pp-2p$. Diesen Werth setze man im dritten für qq, so wird, dasselbe $4pp-4p$. Welches dem ersten gleich gesetzt giebt $2p=4pp-4p$. Man addire $4p$ so wird $6p=4pp$, durch p dividirt $6=4p$ und also $p=\frac{3}{2}$.

Hieraus $qq=-\frac{3}{4}$ und $q=\frac{r-3}{2}$; folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p+q=\frac{3+r-3}{2}$ und die andere $p-q=\frac{3-r-3}{2}$ welche wir auch vorher gefunden.

Capitel

Capitel 9.

Von der Natur der quadratischen Gleichungen.

127.

Aus dem vorhergehenden hat man zur Gnüge ersehen, daß die quadratischen Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können, welche Eigenschaft allerdings verdienet in Erwegung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen daher genauer untersuchen, woher es komme, daß eine jede quadratische Gleichung zweyerley Auflösungen zulasse, weil darinn ohnstreitig eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

128.

Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung daher rühret, weil die Quadratwurzel aus einer jeglichen Zahl so wohl negativ als positiv gesetzt werden könne: allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden lassen, daher wird es gut seyn den Grund davon noch auf eine andere Art deutlich vor Augen zu legen. Es ist demnach nöthig zu erklären, woher es komme daß eine quadratische Gleichung als z. E. $xx = 12x - 35$ auf eine doppelte Art aufgelöset werden, oder daß vor x zweyerley Werthe angezeiget werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Exempel vor x so wohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beyden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

129.

129.

Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, so ist es dienlich alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern o zu stehen kommt. Daher die obige Gleichung seyn wird $xx-12x+35=0$, wobey es darauf ankommt, daß eine solche Zahl gefunden werde, welche wenn sie vor x gesetzt wird, die Formel $xx-12x+35$ wirklich in nichts verwandelt werde; und hernach muß auch die Ursach gezeigt werden, warum solches auf zweyerley Art geschehen könne.

130.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man deutlich zeige, daß eine solche Formel $xx-12x+35$ als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden könne, wie denn diese Formel wirklich aus diesen zwey Factoren besteht $(x-5).(x-7)$. Wenn daher jene Formel soll o werden, so muß auch dieses Product $(x-5).(x-7)=0$ seyn. Ein Product aber, aus so viel Factoren dasselbe auch immer bestehen mag, wird allezeit o, wenn nur einer von seinen Factoren o wird. Denn so groß auch das Product aus den übrigen Factoren seyn mag, wenn dasselbe noch mit o multiplicirt wird, so kommt immer o heraus, welcher Grundsatz für die höhern Gleichungen wohl zu bemerken ist.

131.

Hieraus begreift man nun ganz deutlich, daß dieses Product $(x-5).(x-7)$ auf eine doppelte Art o werden könne: einmal nämlich wenn der erste Factor $x-5=0$ wird, und hernach auch, wenn der andere Factor $x-7=0$ wird. Das erstere geschiehet wenn $x=5$, das andere aber wenn $x=7$. Hieraus versteht man also den wahren Grund, warum eine solche Gleichung $xx-12x+35=0$, zweyerley Auflösungen zuläßt, oder

für

für x zwey Werthe gefunden werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten.

Der Grund besteht nämlich darinn, daß sich die Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus Factoren vorstellen läßt.

132.

Eben dieser Umstand findet bey allen quadratischen Gleichungen statt. Denn wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so erhält man immer eine solche Form $xx - ax + b = o$; und diese Formel kann ebenfalls als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden, welche wir also vorstellen wollen $(x-p)\ (x-q)$ ohne uns darum zu bekümmern, was p und q vor Zahlen seyn mögen. Da nun unsere Gleichung erfordert, daß dieses Product gleich o werde, so ist offenbar, daß solches auf zweyerley Art geschehen könne: erstlich wenn $x=p$, und zweytens wenn $x=q$, welches die beyden Werthe für x sind, die der Gleichung ein Genüge leisten.

133.

Laßt uns nun sehen, wie diese zwey Factoren beschaffen seyn müssen, daß derselben Product just unsere Formel $xx - ax + b$ hervorbringe: man multiplicire demnach dieselben wirklich, so erhält man $xx - (p+q)x + pq$ welches, da es einerley seyn soll mit $xx - ax + b$, so ist klar daß seyn muß $p + q = a$ und $pq = b$, woraus wir diese herrliche Eigenschaft erkennen, daß von einer solchen Gleichung $xx - ax + b = o$ die beyden Werthe für x also beschaffen sind, daß erstlich ihre Summe gleich sey der Zahl a und ihr Product der Zahl b. Daher so bald man einen Werth erkennt, so ist auch leicht der andere zu finden.

134.

Dieses war der Fall, wenn beyde Werthe für x Positiv sind, da denn in der Gleichung das zweyte Glied das Zeichen −, das dritte aber das Zeichen + hat. Wir wollen daher auch die Fälle erwegen, worinnen einer von den beyden Werthen für x, oder auch alle beyde negativ werden. Jenes geschiehet wenn die beyden Factoren der Gleichung also beschaffen sind: $(x-p)(x+q)$; woher diese zwey Werthe für x entspringen, erstlich $x = p$ und zweytens $x = -q$. Die Gleichung selbst aber ist alsdenn $xx + (q-p)x - pq = o$, wo das zweyte Glied das Zeichen + hat wenn nämlich q größer ist als p: wäre aber q kleiner als p so hätte es das Zeichen −, das dritte Glied aber ist hier immer negativ.

Wären aber die beyden Factoren $(x+p)(x+q)$ so wären beyde Werthe für x negativ, nämlich $x = -p$ und $x = -q$ und die Gleichung selbst würde seyn $xx + (p+q)x + pq = o$, wo sowohl das zweyte als das dritte Glied das Zeichen + haben.

135.

Hieraus erkennen wir nun die Beschaffenheit der Wurzeln einer jeglichen quadratischen Gleichung aus dem Zeichen des zweyten und dritten Gliedes. Es sey die Gleichung $xx \ldots ax \ldots b = o$ wenn nun das zweyte und dritte Glied das Zeichen + haben, so sind beyde Werthe negativ: ist das zweyte Glied −, das dritte aber + so sind beye Werthe positiv: ist aber das dritte Glied negativ, so ist ein Werth positiv. Allezeit aber enthält das zweyte Glied die Summe der beyden Werthe, und das dritte ihr Product.

136.

Anjetzo ist es ganz leicht solche quadratische Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwey gegebene

bene Werthe in sich enthalten: man verlangt z. E. eine solche Gleichung, wo der eine Werth für x seyn soll 7, der andere aber −3. Man mache daraus diese einfache Gleichungen x=7 und x=−3; hieraus ferner diese x−7=0 und x+3=0, welches die Factoren der verlangten Gleichung seyn werden: also daß die Gleichung seyn wird xx−4x−21=0, woraus auch nach der obigen Regel eben diese beyde Werthe für x gefunden werden. Denn da xx=4x+21, so wird $x=2\pm\sqrt{25}$, also x=2±5, also entweder x=7 oder x=−3.

137.

Es kann auch geschehen, daß beyde Werthe für x einander gleich werden; man suche nämlich eine Gleichung wo beyde Werthe für x sind x=5; die beyden Factoren werden also seyn (x−5)(x−5) und die Gleichung ist also beschaffen xx−10x+25=0, welche scheinet nur einen Werth zu haben, weil auf eine doppelte Art wird x=5, wie auch die gewöhnliche Auflösung zeigt. Denn da xx=10x−25, so wird $x=5\pm\sqrt{0}$, oder x=5±0 und daher wird x=5 und x=5.

138.

Insonderheit ist hier noch zu merken, daß bisweilen beyde Werthe für x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es ganz und gar unmöglich ist, einen solchen Werth für x anzuzeigen welcher der Gleichung ein Genüge leistet: wie z. E. geschiehet, wenn die Zahl 10 in zwey solche Theile zertheilt werden soll, deren Product 30 sey: denn es sey ein Theil = x so wird der andere seyn 10−x und also ihr Product 10x−xx=30, folglich xx=10x−30 und $x=5\pm\sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl ist und zu erkennen giebt, daß die Frage unmöglich sey.

139.

Es ist demnach sehr wichtig ein Kennzeichen auszufinden, woraus man sogleich erkennen kann, ob eine quadratische Gleichung möglich sey oder nicht. Es sey daher diese allgemeine Gleichung gegeben: $xx - ax + b = o$, so wird $xx = ax - b$ und $x = \frac{1}{2}a \pm r(\frac{1}{4}aa - b)$; woraus erhellet, daß wenn die Zahl b größer ist als $\frac{1}{4}aa$, oder $4b$ größer als aa, die beyden Werthe unmöglich werden, weil man aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel ausziehen müßte. So lange aber hingegen b kleiner ist als $\frac{1}{4}aa$, oder auch gar kleiner als o, das ist negativ, so sind die beyden Werthe immer möglich. Dieselben mögen inzwischen möglich seyn oder unmöglich, so können sie doch nach dieser Art allezeit ausgedrückt werden, und haben auch immer diese Eigenschaft, daß ihre Summe ist $= a$ und ihr Product $= b$, wie in diesem Exempel zu ersehen $xx - 6x + 10 = o$, wo die Summe der beyden Werthe für x seyn muß $= 6$ und das Product $= 10$. Man findet aber diese beyden Werthe: I.) $x = 3 + r - 1$ und II.) $x = 3 - r - 1$, deren Summe $= 6$ und ihr Product $= 10$ ist.

140.

Man kann dieses Kennzeichen auf eine allgemeinere Art ausdrücken, daß es auch auf solche Gleichungen angewandt werden kann $fxx \pm gx + h = o$:

denn hieraus hat man $xx = +\frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$ daher $x = \mp\frac{g}{2f} \pm r\left(\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}\right)$, oder $x = \frac{\mp g \pm r(gg - 4fh)}{2f}$,

woraus erhellet, daß beyde Werthe imaginär oder die Gleichung unmöglich werde, wenn $4fh$ größer ist als g, oder wenn in dieser Gleichung $fxx \pm gx + h = o$

das

das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied größer ist, als das Quadrat des zweyten Glieds. Denn das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied ist $4fhxx$, das Quadrat aber des mittlern Glieds ist $ggxx$: wenn nun $4fhxx$ größer als $ggxx$, so ist auch $4fh$ größer als gg und also die Gleichung unmöglich; in allen übrigen Fällen aber ist die Gleichung möglich und die beyden Werthe für x können wirklich angegeben werden, wenn dieselben gleich auch öfters irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werth gelangen kann, wie oben bemerket worden; dahingegen bey imaginären Ausdrücken als $\sqrt{-5}$ auch keine Näherung statt findet, indem 100 davon eben so weit entfernt ist als 1 oder irgend eine andere Zahl.

141.

Hierbey ist noch zu erinnern, daß eine jegliche solche Formel vom zweyten Grad $xx \pm ax \pm b$ nothwendig allezeit in zwey solche Factores $(x \pm p)(x \pm q)$ aufgelöst werden kann. Denn wenn man drey solche Factoren nehmen wollte, so würde man zum dritten Grad kommen, und nur einer allein würde nicht zum zweyten Grad ansteigen. Daher es eine ausgemachte Sache ist, daß eine jede Gleichung vom zweyten Grad nothwendig zwey Werthe für x in sich enthalte, und daß derselben weder mehr, noch weniger seyn können.

142.

Man hat schon gesehen, daß wenn diese beyden Factores gefunden worden, man daraus auch die beyden Werthe für x anzeigen kann; indem ein jeder Factor, wenn er gleich o gesetzt wird, einen Werth für x angiebt. Dieses findet auch umgekehrt statt, daß

so bald man einen Werth für x gefunden, daraus auch ein Factor der quadratischen Gleichung erkannt werde. Denn wenn $x = p$ ein Werth für x in einer quadratischen Gleichung ist, so ist auch $x - p$ ein Factor derselben: oder die Gleichung, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, läßt sich durch $x - p$ theilen, und der Quotient giebt den andern Factor.

143.

Um dieses zu erläutern so sey diese Gleichung gegeben: $xx + 4x - 21 = 0$, von welcher wir wissen, daß $x = 3$ ein Werth für x sey, indem $3.3 + 4.3 - 21 = 0$ ist, und daher können wir sicher schließen, daß $x - 3$ ein Factor dieser Gleichung sey, oder daß sich $xx + 4x - 21$ durch $x - 3$ theilen lasse, wie aus dieser Division zu ersehen

$$
\begin{array}{l}
x - 3) \; xx + 4x - 21 \; (x + 7 \\
\quad xx - 3x \\
\quad \hline \\
\qquad\quad 7x - 21 \\
\qquad\quad 7x - 21 \\
\qquad\quad \hline \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Also ist der andere Factor $x + 7$ und unsere Gleichung wird durch dieses Product vorgestellt $(x-3)\,(x+7) = 0$ woraus die beyden Werthe für x sogleich erhellen, da nämlich aus dem ersten Factor $x = 3$ aus dem andern aber $x = -7$ wird.

Capitel

Capitel 10.

Von der Auflösung der reinen Cubischen Gleichungen.

144.

Eine reine cubische Gleichung wird genennt, wenn der Cubus der unbekannten Zahl einer bekannten Zahl gleich gesetzt wird, also daß darinn weder das Quadrat der unbekannten Zahl, noch dieselbe selbst vorkommt:

Eine solche Gleichung ist $x^3 = 125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

145.

Wie nun aus einer solchen Gleichung der Werth von x gefunden werden soll, ist für sich offenbahr, indem man nur nöthig hat beyderseits die Cubicwurzel auszuziehen:

Also aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekommt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber hat man $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ oder $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Wenn man daher nur gelernet hat die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen, so kann man auch solche Gleichungen auflösen.

146.

Solcher Gestalt erhält man aber nur einen Werth für x, da nun eine jegliche quadratische Gleichung zwey Werthe hat, so hat man Grund zu vermuthen, daß eine cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben müsse, daher wird es der Mühe werth seyn, diese Sache genauer zu untersuchen, und im Fall eine solche Gleichung mehr Werthe für x haben sollte, dieselben auch ausfündig zu machen.

147.

Wir wollen z. E. diese Gleichung betrachten $x^3 = 8$, woraus alle Zahlen gefunden werden sollen, deren Cubus gleich 8 sey, da nun eine solche Zahl unstreitig $x = 2$ ist, so muß nach dem vorigen Capitel die Formel $x^3 - 8 = 0$ sich nothwendig durch $x - 2$ theilen lassen: wir wollen also diese Theilung verrichten wie folget.

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3-8\ (xx+2x+4 \\
\underline{x^3-2xx} \\
\quad 2xx-8 \\
\quad \underline{2xx-4x} \\
\quad\quad 4x-8 \\
\quad\quad \underline{4x-8} \\
\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Also läßt sich unsere Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch diese Factores vorstellen $(x-2)(xx+2x+4)=0$.

148.

Da nun die Frage ist was für eine Zahl für x angenommen werden müsse, daß $x^3 = 8$ werde, oder daß $x^3 - 8 = 0$ werde, so ist klar, daß dieses geschehe, wenn das gefundene Product gleich 0 werde: dasselbe wird aber 0, nicht nur wenn der erste Factor $x - 2 = 0$

wird,

wird, woraus entspringt $x=2$, sondern auch, wenn der andere Factor $xx+2x+4=0$ werde. Man setze also $xx+2x+4=0$, so hat man $xx=-2x-4$ und daher wird $x=-1\pm\sqrt{-3}$.

149.

Außer dem Fall also $x=2$ in welchem die Gleichung $x^3=8$ erfüllet wird, haben wir noch zwey andere Werthe für x, deren Cubi ebenfalls 8 sind, und welche also beschaffen sind:

I.) $x=-1+\sqrt{-3}$ und II.) $x=-1-\sqrt{-3}$ welches außer Zweifel gesetzt wird, wenn man die Cubi davon nimmt, wie folget:

$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$1-\sqrt{-3}$	$1+\sqrt{-3}$
$-\sqrt{-3}-3$	$+\sqrt{-3}-3$
$-2-2\sqrt{-3}$ Quadrat	$-2+2\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$2+2\sqrt{-3}$	$2-2\sqrt{-3}$
$-2\sqrt{-3}+6$	$+2\sqrt{-3}+6$
8 Cubus	8

Diese beyden Werthe sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts desto weniger bemerket zu werden.

150.

Dieses findet auch insgemein statt für eine jegliche dergleichen cubische Gleichung $x^3=a$, wo außer dem Werth $x=\sqrt[3]{a}$ noch zwey andere ebenfalls statt finden. Man setze um der Kürze willen $\sqrt[3]{a}=c$ also daß $a=c^3$ und unsere Gleichung diese Form bekomme,

$x^3 - c^3 = 0$, welche letztere sich durch $x - c$ theilen läßt, wie aus dieser Division zu sehen:

$$
\begin{array}{l}
x-c)\ x^3-c^3\ (xx+cx+cc \\
\underline{x^3-cxx} \\
\quad cxx-c^3 \\
\quad \underline{cxx-ccx} \\
\qquad ccx-c^3 \\
\qquad \underline{ccx-c^3} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

daher wird unsere Gleichung durch dieses Product vorgestellt $(x-c)(xx+cx+cc)=0$, welches wirklich gleich 0 wird, nicht nur wenn $x-c=0$ oder $x=c$, sondern auch wenn $xx+cx+cc=0$, daraus aber wird $xx=-cx-cc$ und daher $x=-\frac{c}{2}$ $\pm\sqrt{\left(\frac{cc}{4}-cc\right)}$ oder $x=\frac{-c\pm\sqrt{-3cc}}{2}$ das ist $x=\frac{-c\pm c\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.c$, in welcher Formel noch zwey Werthe für x enthalten sind.

151.

Da nun c anstatt $\sqrt[3]{a}$ a geschrieben worden, so ziehen wir daher diesen Schluß, daß von einer jeden cubischen Gleichung von dieser Form $x^3=a$ dreyerley Werthe für x gefunden werden können, welche also ausgedrückt werden:

I.) $x=\sqrt[3]{a}$, II.) $x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{a}$, III.) $x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{a}$

woraus erhellet, daß eine jegliche Cubicwurzel dreyerley Werthe habe, wovon zwar nur der erste möglich,

die

die beyden andern aber unmöglich sind, welches deswegen hier wohl zu bemerken, weil wir schon oben gesehen, daß eine jede quadratische zweyerley Werthe hat, und unten noch gezeigt werden wird, daß eine jede Wurzel vom vierten Grad vier verschiedene Werthe, vom fünften Grad fünf dergleichen und so weiter habe.

Bey gemeinen Rechnungen, wird zwar nur der erste von diesen 3 Werthen gebraucht, weil die beyden andern unmöglich sind, und darüber wollen wir noch einige Exempel beyfügen.

152.

I. Frage: Suche eine Zahl, daß derselben Quadrat mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt 432 hervorbringe?

Diese Zahl sey x, so muß xx mit $\frac{1}{4}$ x multiplicirt der Zahl 432 gleich werden: daher wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$
mit 4 multiplicirt wird $x^3 = 1728$
und die Cubicwurzel ausgezogen, giebt $x = 12$.

Antwort: die gesuchte Zahl ist 12 dann ihr Quadrat ist 144 mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt, das ist 3, giebt 432.

153.

II. Frage: Suche eine Zahl, deren vierte Potestät durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 werde?

Die Zahl sey x, so ist ihre vierte Potestät x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}$ x dividirt, giebt $2x^3$, dazu $14\frac{1}{4}$ addirt soll 100 machen; also hat man $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, wo $14\frac{1}{4}$ subtrahirt giebt $2x^3 = \frac{343}{4}$, durch 2 dividirt, wird $x^3 = \frac{343}{8}$ und die Cubicwurzel ausgezogen erhält man $x = \frac{7}{2}$.

154.

III. Frage: Einige Hauptleute liegen zu Felde, jeder hat unter sich dreymal so viel Reuter, und 20 mal

so

so viel Fußgänger als der Hauptleute sind; und ein Reuter bekommt Monathsfold gleich so viel Gulden, ein Fußgänger aber halb so viel Gulden als der Hauptleute sind, und beträgt der monathliche Sold in allem 13000 Gulden. Wie viel sind es Hauptleute gewesen?

Es seyn x Hauptleute gewesen, so hat einer unter sich gehabt 3 x Reuter und 20 x Fußgänger. Also die Zahl aller Reuter war 3 xx und der Fußgänger 20 xx. Da nun ein Reuter x Fl. bekommt, ein Fußknecht aber $\frac{1}{2}$ x Fl. so ist der monathliche Sold der Reuter 3 x^3 Fl. der Fußknechte aber 10 x^3 Fl. insgesammt also bekommen sie 13 x^3 Fl. so der Zahl 13000 gleich seyn muß: da also 13 $x^3 = 13000$ so wird $x^3 = 1000$ und $x = 10$.

So viel sind der Hauptleute gewesen.

155.

IV. Frage: Etliche Kaufleute machen eine Gesellschaft, und legt jeder 100 mal so viel ein als ihrer sind, schicken damit einen Factoren nach Venedig, der gewinnt je mit 100 Fl. zweymal so viel Fl. als ihrer sind, kommt wieder zurück, und der Gewinnst beträgt 2662 Fl. Ist die Frage wie viel der Kaufleute sind?

Es seyn x Kaufleute gewesen, so hat jeder eingelegt 100 x Fl. und das ganze Capital war 100 xx Fl. Da nun mit 100 Fl. 2 x Fl. gewonnen worden, so war der Gewinnst 2 x^3 so der Zahl 2662 gleich seyn soll: also 2 $x^3 = 2662$, daher $x^3 = 1331$ und folglich $x = 11$, so viel sind es Kaufleute gewesen.

156.

V. Frage: Eine Bäuerinn vertauscht Käse gegen Hühner, giebt je 2 Käse für 3 Hühner: die Hühner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ so viel als der Hühner sind, mit denselben

geht

geht sie auf den Markt, giebt je 9 Eyer für so viel Pfennig als ein Huhn hat Eyer gelegt, löset 72 Pfennig: wie viel hat die Bäurinn Käse vertauscht?

Die Zahl der Käse sey gewesen x, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}$ x Hühner vertauscht worden: da nun ein Huhn $\frac{1}{2}$ x Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}$ xx. Nun werden 9 Eyer verkauft für $\frac{1}{2}$ x Pf. also wird in allem gelöst $\frac{1}{24}$ x^3, so 72 gleich seyn muß: also daß $\frac{1}{24}$ $x^3 = 72$, folglich $x^3 = 24 \cdot 72 = 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 9$ oder $x = 8 \cdot 8 \cdot 27$, folglich $x = 12$, und so viel Käse hat die Bäuerinn gehabt, welche gegen 18 Hühner vertauscht worden.

Capitel II.

Von der Auflösung der vollständigen Cubischen Gleichungen.

157.

Eine vollständige cubische Gleichung wird genennt, wenn darinn außer dem Cubo der unbekannten Zahl, noch diese unbekannte Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, daher die allgemeine Form solcher Gleichungen ist:

$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = o$ wenn nämlich alle Glieder auf eine Seite sind gebracht worden. Wie nun aus einer solchen Gleichung, die Werthe für x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genennt werden, zu finden seyn, soll in diesem Capitel gezeigt werden: denn man kann hier schon zum voraus setzen, daß eine solche Gleichung immer drey Wurzeln habe, weil dieses schon im vorigen Capitel von den reinen Gleichungen dieses Grads ist gezeiget worden.

158. Wir

158.

Wir wollen für den Anfang diese Gleichung betrachten: $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, und da eine quadratische Gleichung als ein Product aus zweyen Factoren angesehen werden kann, so kann man diese cubische Gleichung als ein Product aus drey Factoren ansehen, welche in diesem Fall sind:
$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, als welche mit einander multiplicirt die obige Gleichung hervorbringen. Denn $(x-1).(x-2)$ giebt $xx-3x+2$, und dieses noch mit $x-3$ multiplicirt giebt $x^3 - 6xx + 11x - 6$, welches die obige Form ist, so $= 0$ seyn soll. Dieses geschiehet demnach, wenn dieses Product $(x-1)(x-2)(x-3)$ nichts wird, welches eintrifft, wenn nur einer von den drey Factoren $= 0$ wird, und also in drey Fällen erstlich wenn $x - 1 = 0$, oder $x = 1$, zweytens wenn $x-2=0$, oder $x = 2$, und drittens wenn $x - 3 = 0$ oder $x = 3$.
Man sieht auch so gleich, daß wenn für x eine jegliche andere Zahl gesetzt wird, keiner von diesen drey Factoren 0 werde, und also auch nicht das Product. Daher unsere Gleichung keine andern Wurzeln hat als diese 3.

159.

Könnte man in einem jeglichen andern Fall die drey Factores einer solchen Gleichung anzeigen, so hätte man so gleich die drey Wurzeln derselben. Wir wollen zu diesem Ende drey solche Factores auf eine allgemeine Art betrachten, welche seyn sollen $x-p$, $x-q$, $x-r$: man suche demnach ihr Product, und da der erste mit dem zweyten multiplicirt giebt $xx-(p+q)x+pq$, so giebt dieses Product noch mit $x-r$ multiplicirt folgende Formel $x^3 - (p+q+r)xx + (pq+pr+qr)x - pqr$. Soll nun diese Formel

gleich

gleich o seyn, so geschieht dieses in drey Fällen: erstlich wenn $x-p=o$ oder $x=p$, zweytens wenn $x-q=o$ oder $x=q$, und drittens, wenn $x-r=o$ oder $x=r$.

160.

Es sey nun diese Gleichung folgender Gestalt ausgedrückt $x^3-axx+bx-c=o$, und wenn die Wurzeln derselben sind I.) $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, so muß seyn erstlich $a=p+q+r$, und hernach zweytens $b=pq+pr+qr$ und drittens $c=pqr$, woraus wir sehen, daß das zweyte Glied die Summe der drey Wurzeln enthält, das dritte Glied die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln und endlich das letzte Glied das Product aus allen drey Wurzeln mit einander multiplicirt.

Diese letzte Eigenschaft verschafft uns so gleich diesen wichtigen Vortheil, daß eine cubische Gleichung gewiß keine andere Rationalwurzeln haben kann, als solche, wodurch sich das letzte Glied theilen läßt: denn da dasselbe das Product aller drey Wurzeln ist, so muß es sich auch durch eine jede derselben theilen lassen. Man weis daher so gleich, wenn man eine Wurzel nur errathen will, mit was für Zahlen man die Probe anstellen soll.

Dieses zu erläutern wollen wir diese Gleichung betrachten $x^3=x+6$, oder $x^3-x-6=o$. Da nun dieselbe keine andere Rationalwurzeln haben kann, als solche, dadurch sich das letzte Glied 6 theilen läßt, so hat man nur nöthig mit diesen Zahlen die Probe anzustellen 1, 2, 3, 6, welche Proben also zu stehen kommen:

I.) wenn $x=1$, so kommt $1-1-6=-6$.
II.) wenn $x=2$, so kommt $8-2-6=0$.
III.) wenn $x=3$, so kommt $27-3-6=18$.
IV.) wenn $x=6$, so kommt $216-6-6=204$.

Hieraus

Hieraus sehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung ist, aus welcher es nun leicht ist, die beyden übrigen zu finden. Denn da $x = 2$ eine Wurzel ist: so ist $x - 2$ ein Factor der Gleichung, man darf also nur den andern suchen, welches durch folgende Division geschiehet

$$
\begin{array}{l}
x-2) \; x^3 - x - 6 \; (xx + 2x + 3 \\
\quad x^3 - 2xx \\
\hline
\qquad 2xx - x - 6 \\
\qquad 2xx - 4x \\
\hline
\qquad\quad 3x - 6 \\
\qquad\quad 3x - 6 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Da nun unsere Formel durch dieses Product vorgestellet wird $(x-2)(xx+2x+3)$ so wird dieselbe 0, nicht nur wenn $x - 2 = 0$, sondern auch wenn $xx + 2x + 3 = 0$. Hieraus aber bekommen wir $xx = -2x - 3$ und daher $x = -1 \pm \sqrt{-2}$, welches die beyden andern Wurzeln unserer Gleichung sind, die wie man sieht unmöglich oder imaginär sind.

161.

Dieses findet aber nur statt, wenn das erste Glied der Gleichung x^3 mit 1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multiplicirt sind. Wenn aber darinn Brüche vorkommen, so hat man ein Mittel die Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von Brüchen befreyet ist, da denn die vorige Probe kann angestellet werden.

Denn es sey diese Gleichung gegeben $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$; weil hier nun Viertel vorkommen,

so

so setze man $x = \frac{y}{2}$, da bekommt man $\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0$, welche mit 8 multiplicirt giebt $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, wovon die Wurzeln sind wie wir oben gesehen $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, daher ist für unsere Gleichung I.) $x = \frac{1}{2}$, II.) $x = 1$, III.) $x = \frac{3}{2}$.

162.

Wenn nun das erste Glied mit einer Zahl multiplicirt, das letzte aber 1 ist, als wie in dieser Gleichung $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, woraus durch 6 dividirt diese entspringt $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$ welche nach obiger Regel von den Brüchen befreyet werden könnte, indem man setzt $x = \frac{y}{6}$; denn da erhält man $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{6y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, und diese mit 216 multiplicirt wird $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$. Hier würde es mühsam seyn die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzustellen: weil aber in unserer erstern Gleichung, das letzte Glied 1 ist, so setze man $x = \frac{1}{z}$ so wird $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, welche mit z^3 multiplicirt giebt $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ und alle Glieder auf die andere Seite gebracht $z^3 - 6zz + 11z - 6 = 0$, deren Wurzeln sind $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$; daher wir für unsere Gleichung erhalten $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

163.

Aus dem obigen erkennt man, daß wenn alle Wurzeln positive Zahlen sind, in der Gleichung die Zeichen plus und minus mit einander abwechseln müssen, also daß die Gleichung eine solche Gestalt bekommt:
$x^3 - axx + bx - c = 0$, wo drey Abwechselungen vorkommen, nämlich eben so viel als positive Wurzeln

vorhanden. Wären aber alle drey Wurzeln negativ gewesen, und man hätte diese drey Factores mit einander multiplicirt $x + p$, $x + q$, $x + r$, so würden alle Glieder das Zeichen plus, und die Gleichung diese Form bekommen haben $x^3 + axx + bx + c = o$, wo dreymal zwey gleiche Zeichen auf einander folgen, das ist, eben so viel als negative Wurzeln sind.

Hieraus hat man nun den Schluß gezogen, daß so oft die Zeichen abwechseln, die Gleichung auch so viel positive Wurzeln, so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieselbe eben so viel negative Wurzeln habe, welche Anmerkung allhier von großer Wichtigkeit ist, damit man wisse, ob man die Theiler des letzten Glieds, damit man die Probe anstellen will, negativ oder positiv nehmen soll.

164.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir diese Gleichung betrachten:

$x^3 + xx - 34x + 56 = o$, in welcher zwey Abwechselungen der Zeichen und nur eine Folge eben desselben Zeichens vorkommt, woraus wir schließen, daß diese Gleichung zwey positive und eine negative Wurzel habe, welche Theiler seyn müssen des letzten Glieds 56 und also unter diesen Zahlen $\pm$ 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56. begriffen sind.

Setzt man nun $x = 2$, so wird $8 + 4 - 68 + 56 = o$, woraus wir sehen, daß $x = 2$ eine positive Wurzel, und also $x - 2$ ein Theiler unserer Gleichung sey, woraus die beyden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden können, wenn man nur die Gleichung durch $x - 2$ theilet wie folget:

$x - 2)$

$$x - 2)\, x^3 + xx - 34x + 56\ (xx + 3x - 28$$
$$x^3 - 2xx$$
$$3xx - 34x + 56$$
$$3xx - 6x$$
$$-28x + 56$$
$$-28x + 56$$
$$0$$

Man setze also diesen Quotienten $xx + 3x - 28 = 0$, so wird man daraus die beyden übrigen Wurzeln finden, welche seyn werden $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1}$, daher die beyden übrigen Wurzeln sind $x = 4$ und $x = -7$ wozu die obige $x = 2$ zu nehmen.

Woraus erhellet, daß wirklich zwey positive und nur eine negative Wurzel vorhanden: dieses wollen wir noch durch folgende Exempel erläutern.

165.

I. Frage: Es sind zwey Zahlen, ihre Differenz ist 12, wenn man ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, so kommen 14560, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere sey x, so ist die größere $x + 12$, ihr Product ist $xx + 12x$ so mit ihrer Summe $2x + 12$ multiplicirt giebt $2x^3 + 36xx + 144x = 14560$ durch 2 dividirt wird $x^3 + 18xx + 72x = 7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 allzu groß ist, als daß die Probe mit allen seinen Theilern könnte angestellet werden, dasselbe aber durch 8 theilbar ist, so setze man $x = 2y$, da denn kommt:
$8y^3 + 72yy + 144y = 7280$, welche Gleichung durch 8 dividirt wird $y^3 + 9yy + 18y = 910$, und jetzo darf man nur mit den Theilern der Zahl 910 probiren welche sind 1, 2, 5, 7, 10, 13 ꝛc. nun aber sind die ersten 1, 2, 5 offenbar zu klein, nimmt man aber $y = 7$ so

bekommt man 343 + 441 + 126 just = 910; also ist eine Wurzel y = 7, folglich x = 14, will man noch die beyden übrigen Wurzeln von y wissen so dividire man $y^3 + 9yy + 18y - 910$ durch $y - 7$ wie folget:

$$
\begin{array}{l}
y - 7) \; y^3 + 9yy + 18y - 910 \; (yy + 16y + 130 \\
\quad y^3 - 7yy \\
\quad \hline
\quad\quad 16yy + 18y - 910 \\
\quad\quad 16yy - 112y \\
\quad\quad \hline
\quad\quad\quad 130y - 910 \\
\quad\quad\quad 130y - 910 \\
\quad\quad\quad \hline
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Setzt man nun diesen Quotient $yy + 16y + 130 = 0$, so bekommt man $yy = -16y - 130$, und daher $y = -8 \pm \sqrt{-66}$, also sind die beyden andern Wurzeln unmöglich.

Antwort: die beyden gesuchten Zahlen sind demnach 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt giebt 14560.

166.

II. Frage: Suche zwey Zahlen, deren Differenz 18, wenn man die Differenz ihrer Cuborum mit der Summe der Zahlen multiplicirt, daß 275184 heraus komme, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x + 18$ der Cubus der kleinern aber x^3, und der Cubus der größern $= x^3 + 54xx - 972x + 5832$, also die Differenz derselben $54xx + 972x + 5832 = 54 (xx + 18x + 108)$ welche mit der Summe der Zahlen $2x + 18 = 2 (x + 9)$ multiplicirt werden soll: das Product ist aber $108 (x^3 + 27xx + 270x + 972) = 275184$: man dividire durch 108, so kommt $x^3 + 27xx + 270x + 972 = 2548$ oder $x^3 + 27xx + 270x = 1576$. Die Theiler der Zahl

1576 sind 1, 2, 4, 8 ꝛc. wo 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet, wollte man die beyden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch $x - 4$ theilen wie folget:

$$x-4)\ x^3 + 27xx + 270x - 1576\ (xx + 31x + 394$$
$$x^3 - 4xx$$
$$31xx + 270x$$
$$31xx - 124x$$
$$394x - 1576$$
$$394x - 1576$$
$$0$$

Aus dem Quotienten erhält man daher $xx = -31x - 394$, und daraus wird $x = -\frac{31}{2} \pm r\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)$ welche beyde Wurzeln imaginär oder unmöglich sind.

Antwort: also sind die gesuchten Zahlen 4 und 22.

167.

III. Frage: Suche zwey Zahlen, deren Differenz 720; so ich die Quadratwurzel der größern Zahl multiplicire mit der kleinern Zahl so kommt 20736. Welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere $= x$, so ist die größere $x + 720$ und soll seyn $x\ r\ (x + 720) = 20736 = 8.\ 8.\ 4.\ 81.$

Nun nehme man beyderseits die Quadrate, so wird $xx\,(x + 720) = x^3 + 720xx = 8^2.\ 8^2.\ 4^2.\ 81^2$, man setze $x = 8y$,

so wird $8^3\ y^3 + 720.\ 8^2\ y^2 = 8^2.\ 8^2.\ 4^2.\ 81^2$

durch 8^3 dividirt wird $y^3 + 90\ y^2 = 8.\ 4^2.\ 81^2$, es sey nun $y = 2z$

so wird $8\ z^3 + 4.\ 90zz = 8.\ 4^2.\ 81^2$

durch 8 dividirt wird $z^3 + 45zz = 4^2 . 81^2$. Man setze ferner $z = 9u$,
so wird $9^3 u^3 + 45 . 9^2 uu = 4^2 . 9^4$
durch 9^3 dividirt wird $u^3 + 5uu = 4^2 . 9$ oder $uu(u+5) = 16 . 9 = 144$. Hier sieht man offenbar, daß $u = 4$: denn da wird $uu = 16$ und $u + 5 = 9$: da nun $u = 4$ so ist $z = 36$, $y = 72$ und $x = 576$, welches die kleinere Zahl war, die größere aber 1296, wovon die Quadratwurzel 36, welche mit der kleineren Zahl 576 multiplicirt giebt 20736.

168.

Anmerkung: Diese Frage kann bequemer folgender Gestalt aufgelöset werden: weil die größere Zahl ein Quadrat seyn muß, indem sonst ihre Wurzel mit der kleinern multiplicirt nicht die vorgegebene Zahl hervorbringen könnte: So sey die größere Zahl xx, die kleinere also $xx - 720$, welche mit der Quadratwurzel jener, das ist mit x multiplicirt, giebt $x^3 - 720x = 20736 = 64 . 27 . 12$ man setze $x = 4y$,
so wird $64y^3 - 720 . 4y = 64 . 27 . 12$:
durch 64 dividirt wird $y^3 - 45y = 27 . 12$: man setze ferner $y = 3z$,
so wird $27z^3 - 135z = 27 . 12$:
durch 27 dividirt wird $z^3 - 5z = 12$ oder $z^3 - 5z - 12 = 0$. Die Theiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, davon sind 1 und 2 zu klein, setzt man aber $z = 3$ so kommt $27 - 15 - 12 = 0$; daher ist $z = 3$, $y = 9$ und $x = 36$ daher ist die größere Zahl $xx = 1296$, und die kleinere $xx - 720 = 576$ wie oben.

169.

IV. Frage: Es sind 2 Zahlen, deren Differenz 12 ist. So man nun diese Differenz multiplicirt mit der Summe ihrer Cuborum, so kommen 102144: welche Zahlen sind es?

Es

Es sey die kleinere x, so ist die größere x + 12, der Cubus der ersteren ist x, der andern aber x^3 + 36xx + 432x + 1728, die Summe derselben mit 12 multiplicirt giebt 12 ($2x^3$ + 36xx + 432x + 1728) = 102144; durch 12 dividirt wird $2x^3$ + 36xx + 432x + 1728 = 8512, durch 2 dividirt giebt x^3 + 18xx + 216x + 864 = 4256 oder x^3 + 18xx + 216x = 3392 = 8. 8. 53. Man setze x = 2y und dividire sogleich durch 8, so wird y^3 + 9yy + 54y = 8. 53 = 424.

Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, 8, 53, 2c. wovon 1 und 2 zu klein sind: setzt man aber y = 4, so kommt 64 + 144 + 216 = 424. Also ist y = 4 und x = 8; daher sind die beyden Zahlen 8 und 20.

170.

V. Frage: Etliche machen eine Gesellschaft, davon jeder zehnmal so viel Fl. einlegt, als der Personen sind, gewinnen je mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind. Nun findet sich daß der Gewinnst zusammen betrage 392 Fl. wie viel sind der Gesellen gewesen?

Man setze es seyn x Gesellen gewesen, so legt einer 10x Fl. ein, alle aber legen 10xx Fl. ein, und gewinnen mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind; also mit 100 Fl. gewinnen sie x + 6 Fl. und mit dem ganzen Capital gewinnen sie $\frac{x^3 + 6xx}{10} = 392$

Mit 10 multiplicirt kommt x^3 + 6xx = 3920. Setzt man nun x = 2y
so erhält man $8y^3$ + 24yy = 3920
welches durch 8 dividirt giebt y^3 + 3yy = 490. Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 5, 7, 10, 2c. wovon 1, 2 und 5 zu klein sind.
Setzt man aber y = 7, so kommt 343 + 147 = 490,
also ist y = 7 und x = 14
Antwort: Es sind 14 Gesellen gewesen, und hat ein jeder 140 Fl. eingelegt.

171.

VI. Frage: Einige Kaufleute haben zusammen ein Capital von 8240 Rthl. dazu legt ein jeder noch 40mal so viel Rthl. als der Gesellen sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Pr. C. als der Gesellen sind: hierauf theilen sie den Gewinnst und da findet es sich, daß nachdem ein jeder zehn mal so viel Rthl. genommen hat als der Gesellen sind, so bleiben noch 224 Rthl. übrig. Wie viel sind es Gesellen gewesen?

Die Zahl der Gesellen sey = x, so legt ein jeder noch 40x Rthl. zu dem Capital von 8240 Rthl. alle zusammen legen also dazu noch 40 xx Rthl. also war die ganze Summe $40xx + 8240$ mit dieser gewinnen sie von 100, x Rthl. daher wird der ganze Gewinnst seyn:

$\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824x}{10} = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5}$. Hiervon nimmt nun ein jeder 10x Rthl. und also alle zusammen 10xx Rthl. und da bleiben noch 224 Rthl. übrig, woraus erhellet, daß der Gewinnst gewesen sey:
$10xx + 224$ woraus diese Gleichung entsteht

$\frac{2}{5}x^3 + \frac{412x}{5} = 10xx + 224$, welche mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt wird $x^3 + 206x = 25xx + 560$ oder $x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0$. Doch um zu probiren wird die erste Form bequemer seyn, da nun die Theiler des letzten Glieds sind:
1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, ꝛc. welche Positiv genommen werden müssen, weil in der letztern Gleichung drey Abwechselungen von Zeichen vorkommen, woraus man sicher schließen kann, daß alle drey Wurzeln positiv sind. Probirt man nun mit x=1 oder x=2, so ist offenbar, daß der erste Theil viel kleiner werde als der zweyte. Wir wollen also mit den folgenden probiren:
Wenn x=4, so wird 64 + 824 = 400 + 560 trifft nicht zu.

Wenn

Wenn x=5, so wird 125+1030=625+560 trifft nicht zu.
Wenn x=7, so wird 343+1442=1225+560 trifft zu:
daher ist x=7 eine Wurzel unserer Gleichung. Um die beyden andern zu finden, so theile man die letzte Form durch x−7 wie folget:

$$x-7)\ x^3-25xx+206x-560\ (xx-18x+80$$
$$x^3-7xx$$
$$-18xx+206x$$
$$-18xx+126x$$
$$80x-560$$
$$80x-560$$
$$0$$

Man setze also den Quotienten gleich 0, so hat man $xx-18x+80=0$ oder $xx=18x-80$ daher $x=9\pm1$, also sind die beyden andern Wurzeln x=8 und x=10.

Antwort: auf diese Frage finden also drey Antworten statt: nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war dieselbe 8, nach der dritten 10, wie von allen die hier beygefügte Probe anzeigt.

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute	7	8	10
Ein jeder legt ein 40x	280	320	400
also zusammen legen ein 40xx	1960	2560	4000
das alte Capital war	8240	8240	8240
das ganze Capital ist 40xx+8240	10200	10800	12240
mit demselben wird gewonnen so viel Pr. C. als der Gesellen sind	714	864	1224
davon nimmt ein jeder weg 10x	70	80	100
also alle zusammen 10xx	490	640	1200
bleibt also noch übrig	224	224	224

Capitel 12.

Von der Regel des Cardani oder des Scipionis Ferrei.

172.

Wenn eine cubische Gleichung auf ganze Zahlen gebracht wird, wie oben gewiesen worden, und kein Theiler des letzten Glieds eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in ganzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine statt finde, welches also gezeiget wird:

Es sey die Gleichung $x^3 - axx + bx - c = o$, wo a, b und c ganze Zahlen sind, denn wollte man z. E. setzen $x = \frac{3}{2}$, so kommt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$, hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner. Die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt, oder ganze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht können o werden, und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

173.

Da nun in diesen Fällen die Wurzel der Gleichung weder ganze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben Irrational und auch so gar öfters imaginär. Wie nun dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darinn für Wurzelzeichen vorkommen, ist eine Sache von großer Wichtigkeit, wovon die Erfindung schon vor einigen 100 Jahren dem Cardano oder vielmehr dem Scipioni Ferreo zugeschrieben worden, welche

welche deswegen verdient hier mit allem Fleiße erklärt zu werden.

174.

Man muß zu diesem Ende die Natur eines Cubi, dessen Wurzel ein Binomium ist, genauer in Erwegung ziehen:

Es sey demnach die Wurzel $a + b$, so ist der Cubus davon $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, welche erstlich aus dem Cubo eines jeden Theils besteht und außer denselben noch die zwey Mittel-Glieder enthält, nämlich $3aab + 3abb$, welche beyde $3ab$ zum Factor haben, der andere Factor aber ist $a + b$. Denn $3ab$ mit $a + b$ multiplicirt giebt $3aab + 3abb$. Diese zwey Glieder enthalten also das dreyfache Product der beyden Theile a und b mit ihrer Summe multiplicirt.

175.

Man setze nun es sey $x = a + b$, und nehme beyderseits die Cubi, so wird $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Da nun $a + b = x$ ist, so hat man diese cubische Gleichung $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$, oder $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$ von welcher wir wissen, daß eine Wurzel sey $x = a + b$. So oft demnach eine solche Gleichung vorkommt, so können wir eine Wurzel davon anzeigen.

Es sey z. E. $a = 2$ und $b = 3$, so bekommt man diese Gleichung $x^3 = 18x + 35$, von welcher wir gewiß wissen, daß $x = 5$ eine Wurzel ist.

176.

Man setze nun ferner $a^3 = p$ und $b^3 = q$, so wird $a = \sqrt[3]{p}$ und $b = \sqrt[3]{q}$, folglich $ab = \sqrt[3]{pq}$; wenn daher

her diese cubische Gleichung vorkommt $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$ so ist eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer dergestalt bestimmen, daß sowohl $3\sqrt[3]{pq}$ als $p + q$ einer jeden gegebenen Zahl gleich werde, wodurch man in Stand gesetzt wird, eine jede cubische Gleichung von dieser Art aufzulösen.

177.

Es sey daher diese allgemeine cubische Gleichung vorgegeben $x^3 = fx + g$. Hier muß also f verglichen werden mit $3\sqrt[3]{pq}$, und g mit $p + q$; oder man muß p und q so bestimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl f, und $p + q$ der Zahl g gleich werde, und alsdenn wissen wir, daß eine Wurzel unserer Gleichung seyn werde $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

178.

Man hat also diese zwey Gleichungen aufzulösen I.) $3\sqrt[3]{pq} = f$ und II.) $p + q = g$. Aus der ersten hat man $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ und $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{2\frac{7}{7}} f^3$ und $4pq = \frac{4}{2\frac{7}{7}} f^3$: die andere Gleichung quadrire man, so kommt $pp + 2pq + qq = gg$; davon subtrahire man $4pq = \frac{4}{2\frac{7}{7}} f^3$, so wird $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{2\frac{7}{7}} f^3$ woraus die Quadratwurzel gezogen giebt $p - q = \sqrt{(gg - \frac{4}{2\frac{7}{7}} f^3)}$. Da nun $p + q = g$, so wird $2p = g + \sqrt{(gg - \frac{4}{2\frac{7}{7}} f^3)}$ und $2g = g - \sqrt{(gg - \frac{4}{2\frac{7}{7}} f^3)}$ daher erhalten wir $p = \frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{2\frac{7}{7}} f^3)}}{2}$ und $q = \frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{2\frac{7}{7}} f^3)}}{2}$.

179.

179.

Wenn also eine solche cubische Gleichung vorkommt $x^3 = fx + g$, die Zahlen f und g mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so ist eine Wurzel derselben allezeit $x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27} f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27} f^3)}}{2}}$; woraus erhellet daß diese Irrationalität nicht nur das Quadratwurzelzeichen sondern auch das Cubische in sich fasse: und diese Formel ist dasjenige was die Regel des Cardani genennt zu werden pflegt.

180.

Wir wollen dieselbe mit einigen Exempeln erläutern:

Es sey $x^3 = 6x + 9$ so ist hier $f = 6$ und $g = 9$, also $gg = 81$, $f^3 = 216$ und $\frac{4}{27} f^3 = 32$: Daher $gg - \frac{4}{27} f^3 = 49$ und $\sqrt{(gg - \frac{4}{27} f^3)} = 7$; daher wird von der vorgegebenen Gleichung eine Wurzel seyn

$x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, das ist $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ oder $x = 2 + 1 = 3$. Also ist $x = 3$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

181.

Es sey ferner gegeben diese Gleichung $x^3 = 3x + 2$, so wird $f = 3$ und $g = 2$, also $gg = 4$, $f^3 = 27$ und $\frac{4}{27} f^3 = 4$; folglich die Quadratwurzel aus $gg - \frac{4}{27} f^3 = 0$; daher eine Wurzel seyn wird

$x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2.$

182.

182.

Wenn aber gleich eine solche Gleichung eine rationale Wurzel hat, so geschieht es doch öfters daß dieselbe durch diese Regel nicht gefunden wird ob sie gleich darinnen steckt.

Es sey gegeben diese Gleichung $x^3 = 6x + 40$, wo $x = 4$ eine Wurzel ist. Hier ist nun $f = 6$ und $g = 40$ ferner $gg = 1600$ und $\frac{4}{27} f^3 = 32$, also $gg - \frac{4}{27} f^3 = 1568$ und $r(gg - \frac{4}{27} f^3) = r\,1568 = r\,4.\,4.\,49.\,2 = 28\,r\,2$; folglich ist eine Wurzel

$$x = \sqrt[3]{r\,\frac{40 + 28\,r\,2}{2}} + \sqrt[3]{r\,\frac{40 - 28\,r\,2}{2}} \text{ oder } x =$$

$\sqrt[3]{r}\,(20 + 14\,r\,2) + \sqrt[3]{r}\,(20 - 14\,r\,2)$ welche Formel wirklich 4 ist, ohngeacht solches nicht sogleich daraus erhellet.

Denn da der Cubus von $2 + r\,2$ ist $20 + 14\,r\,2$, so ist umgekehrt die Cubicwurzel aus $20 + 14\,r\,2$ gleich $2 + r\,2$, und eben so auch $\sqrt[3]{r}\,(20 - 14\,r\,2) = 2 - r\,2$, hieraus wird unsere Wurzel $x = 2 + r\,2 + 2 - r\,2 = 4$.

183.

Man kann gegen diese Regel einwenden, daß dieselbe sich nicht auf alle cubische Gleichungen erstrecke, weil darinnen nicht das Quadrat von x vorkommt, oder weil darinn das zweyte Glied fehlt. Es ist aber zu merken, daß eine jede vollständige Gleichung allezeit in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das zweyte Glied fehlt, und worauf folglich diese Regel angewandt werden kann. Um dieses zu zeigen, so sey diese vollständige cubische Gleichung vorgegeben, $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Da nehme man nun den dritten Theil der Zahl 6 im andern Glied und setze $x - 2 = y$;

so

so wird $x = y + 2$, und die übrige Rechnung wie folget:

da $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$ und
$x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, so ist

x^3	$= y^3 + 6yy + 12y + 8$	
$-6xx =$	$-6yy - 24y - 24$	
$+11x =$	$+11y + 22$	
$-6 =$		-6

$x^3 - 6xx + 11x - 6 = y^3 - y$.

Daher erhalten wir diese Gleichung $y^3 - y = 0$ deren Auflösung so gleich in die Augen fällt: denn nach den Factoren hat man $y(yy-1) = y(y+1)(y-1) = 0$; setzt man nun einen jeden Factor gleich 0 so bekommt man:

I. $\begin{cases} y = 0, \\ x = 2, \end{cases}$ II. $\begin{cases} y = -1, \\ x = 1, \end{cases}$ III. $\begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

welches die drey schon oben gefundenen Wurzeln sind.

184.

Es sey nun diese allgemeine cubische Gleichung gegeben: $x^3 + axx + bx + c = 0$ aus welcher das zweyte Glied weggebracht werden soll.

Zu diesem Ende setze man zu x den dritten Theil der Zahl des zweyten Glieds mit ihrem Zeichen und schreibe dafür einen neuen Buchstaben z. E. y, dieser Regel zu folge werden wir haben $x + \frac{1}{3}a = y$ und also $x = y - \frac{1}{3}a$ woraus die folgende Rechnung entsteht:

$x = y - \frac{1}{3}a$, $xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa$ ferner $x^3 = y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$; also

$x^3 = y^3$

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3 \\ axx = & + ayy - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^3 \\ by = & + by - \frac{1}{3}ab \\ c = & + c \\ \hline & y^3 - (\frac{1}{3}aa - b)\,y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = o \end{array}$$

in welcher Gleichung das zweyte Glied fehlt.

185.

Nun kann man auch des Cardani Regel leicht auf diesen Fall anwenden. Denn da wir oben die Gleichung hatten $x^3 = fx + g$ oder $x^3 - fx - g = o$, so wird für unsern Fall $f = \frac{1}{3}aa - b$, und $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab + c$. Aus diesen für die Buchstaben f und g gefundenen Werthen erhalten wir wie oben:

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}$$

und da solcher Gestalt y gefunden worden, so werden wir für die vorgegebene Gleichung haben $x = y - \frac{1}{3}a$.

186.

Mit Hülfe dieser Veränderung sind wir nun im Stande die Wurzeln von allen cubischen Gleichungen zu finden, welches wir durch folgendes Exempel zeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Gleichung folgende $x^3 - 6xx + 13x - 12 = o$. Um hier das zweyte Glied wegzubringen, so setze man $x - 2 = y$, so wird:

$x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$, ferner $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, also

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & -6yy - 24y - 24 \\ +13x = & +13y + 26 \\ -12 = & -12 \\ \hline & y^3 + y - 2 = o \end{array}$$

oder

oder $y^3 = -y + 2$, welche mit der Formel $x^3 = fx + g$ verglichen giebt $f = -1$, $g = 2$; also $gg = 4$, und $\frac{4}{27} f^3 = -\frac{4}{27}$.

Also $gg - \frac{4}{27} f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; daher erhalten wir

$$r\,(gg - \tfrac{4}{27} f^3) = r\,\tfrac{112}{27} = \frac{4\,r\,21}{9}$$ woraus folget

$$y = \sqrt[3]{r\left\{\frac{2 + \frac{4\,r\,21}{9}}{2}\right\}} + \sqrt[3]{r\left\{\frac{2 - \frac{4\,r\,21}{9}}{2}\right\}}$$ oder

$$y = \sqrt[3]{r\left(1 + \frac{2\,r\,21}{9}\right)} + \sqrt[3]{r\left(1 - \frac{2\,r\,21}{9}\right)}, \text{ oder } y$$

$$= \sqrt[3]{r\left(\frac{9 + 2\,r\,21}{9}\right)} + \sqrt[3]{r\left(\frac{9 - 2\,r\,21}{9}\right)}, \text{ oder } y$$

$$= \sqrt[3]{r\left(\frac{27 + 6\,r\,21}{27}\right)} + \sqrt[3]{r\left(\frac{27 - 6\,r\,21}{27}\right)}, \text{ oder } y$$

$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{r\,(27 + 6\,r\,21)} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{r\,(27 - 6\,r\,21)}$; und hernach bekommt man $x = y + 2$.

187.

Bey Auflösung dieses Exempels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen, gleich wohl muß man daraus nicht schließen, daß die Wurzel schlechter Dinges Irrational sey, indem es sich glücklicher Weise fügen könnte, daß die Binomie $27 \pm 6\,r\,21$ wirkliche Cubi wären. Dieses trifft auch hier zu, denn da der Cubus von $\frac{3 + r\,21}{2}$ dem $\frac{216 + 48\,r\,21}{8} = 27 + 6\,r\,21$ gleich ist, so ist die Cubicwurzel aus 27 $+ 6\,r\,21$ gleich $\frac{3 + r\,21}{2}$ und die Cubicwurzel aus

$27-6r21$ gleich $\frac{3-r21}{2}$. Hieraus also wird der obige Werth für y seyn $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+r21}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-r21}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$. Da nun $y=1$ so bekommen wir $x=3$, welches eine Wurzel ist der vorgegebenen Gleichung. Wollte man die beyden andern auch finden so müßte man die Gleichung durch $x-3$ dividiren, wie folget

$$x-3)\ x^3-6xx+13x-12\ (xx-3x+4$$
$$\underline{x^3-3xx}$$
$$-3xx+13x$$
$$\underline{-3xx+9x}$$
$$+4x-12$$
$$\underline{+4x-12}$$
$$0$$

und diesen Quotienten $xx-3x+4=0$ setzen, also daß $xx = 3x-4$ und $x = \frac{3}{2} \pm r\left(\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right) = \frac{3}{2} \pm r-\frac{7}{4}$, das ist $x = \frac{3 \pm r-7}{2}$. Dieses sind nun die beyden andern Wurzeln, welche beyde imaginär sind.

188.

Es war aber hier ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien wirklich die Cubicwurzel ausziehen konnte, welches sich auch nur in denen Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rationalwurzel hat, die daher weit leichter nach den Regeln des vorigen Capitels hätte gefunden werden können: wenn aber keine Rationalwurzel statt findet, so kann dieselbe auch nicht

anders

anders als auf diese Art nach des Cardani Regel ausgedruckt werden, so daß alsdenn keine weitere Abkürzung Platz findet, wie z. E. in dieser Gleichung geschiehet $x^3 = 6x + 4$, wo $f = 6$ und $g = 4$. Daher gefunden wird $x = \sqrt[3]{r}\,(2 + 2r - 1) + \sqrt[3]{r}\,(2 - 2r - 1)$ welche sich nicht anders ausdrücken läßt.

Capitel 13.

Von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch biquadratische Gleichungen genennt werden.

189.

Wenn die höchste Potestät der Zahl x zum vierten Grad hinauf steiget, so werden solche Gleichungen vom vierten Grad auch biquadratische genennt, wovon also die allgemeine Form seyn wird: $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = o$, von diesen kommen nun zu allererst zu betrachten vor die so genannten reinen biquadratischen Gleichungen, deren Form ist $x^4 = f$ woraus man so gleich die Wurzel findet, wenn man beyderseits die Wurzel vom vierten Grad auszieht, da man denn erhält $x = \sqrt[4]{r}\,f$.

190.

Da x^4 das Quadrat ist von xx so wird die Rechnung nicht wenig erläutert, wenn man erstlich nur die Quadratwurzel ausziehet, da man denn bekommt $xx = \sqrt{r}\,f$: hernach zieht man nochmals die Quadratwurzel aus, so bekommt man $x = \sqrt{r}\,\sqrt{r}\,f$, also

daß $\sqrt[4]{f}$ nichts anders ist, als die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel von f.

Hätte man z. E. diese Gleichung $x^4 = 2401$ so findet man daraus erstlich $xx = 49$ und ferner $x = 7$.

191.

Solcher gestalt aber findet man nur eine Wurzel, und da immer drey cubische Wurzeln statt finden, so ist kein Zweifel, daß hier nicht vier Wurzeln sollten Platz haben, welche inzwischen auch auf diese Art heraus gebracht werden können. Denn da aus dem letzten Exempel nicht nur folget $xx = 49$ sondern auch $xx = -49$, so erhalten wir aus jenem diese zwey Wurzeln $x = 7$, $x = -7$ aus diesem aber bekommen wir ebenfalls: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$ welches die vier biquadratische Wurzeln sind aus 2401. Und so verhält es sich auch mit allen andern Zahlen.

192.

Nach diesen reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, in welchen das zweyte und vierte Glied fehlt, oder die diese Form haben:
$x^4 + fxx + g = 0$, als welche nach der Regel der quadratischen Gleichungen aufgelöst werden können. Denn setzt man $xx = y$ so hat man $yy + fy + g = 0$, oder $yy = -fy - g$ woraus gefunden wird: $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{(\frac{1}{4}ff - g)} = \frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}$. Da nun $xx = y$, so wird daraus $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}}$

wo die zweydeutigen Zeichen $\pm$ alle vier Wurzeln angeben.

193.

193.

Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor, so kann man dieselbe immer als ein Product aus vier Factoren ansehen. Denn multiplicirt man diese vier Factores mit einander $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ so findet man folgendes Product $x^4-(p+q+r+s)x^3 + (pq+pr+ps+qr+qs+rs)xx - (pqr+pqs+prs+qrs)x+pqrs$, welche Formel nicht anders gleich o werden kann, als wenn einer von obigen vier Factoren $=o$ ist. Dieses kann demnach auf viererley Art geschehen, I.) wenn $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$, IV.) $x=s$, welches demnach die vier Wurzeln dieser Gleichung sind.

194.

Betrachten wir diese Form etwas genauer, so finden wir, daß in dem zweyten Glied die Summe aller vier Wurzeln vorkommt, welche mit $-x^3$ multiplicirt ist, im dritten Glied findet sich die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit xx multiplicirt ist, im vierten Glied sieht man die Summe der Producte aus je drey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit $-x$, multiplicirt ist, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product aus allen vier Wurzeln mit einander multiplicirt.

195.

Da das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln enthält, so kann eine solche biquadratische Gleichung keine andere Rationalwurzel haben, als welche zugleich Theiler des letzten Glieds sind, daher man aus diesem Grund alle Rationalwurzeln, wenn dergleichen vorhanden, leicht finden kann, wenn man für x nach und nach einen jeden Theiler des letzten Glieds

setzt und zusieht, mit welchem der Gleichung ein Genüge geschehe, hat man aber auch nur eine solche Wurzel gefunden, z. E. $x = p$, so darf man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x - p$ dividiren und den Quotienten gleich o setzen, welche eine cubische Gleichung geben wird, die nach den obigen Regeln weiter aufgelöst werden kann.

196.

Hierzu aber wird nun unumgänglich erfordert, daß alle Glieder aus ganzen Zahlen bestehen, und daß das erste bloß da stehe, oder nur mit 1 multiplicirt sey: kommen demnach in einigen Gliedern Brüche vor, so müssen dieselben vorher weggeschafft werden, welches jederzeit geschehen kann, wenn man für x schreibt y getheilt durch eine Zahl, welche die Nenner der Brüche in sich schließt:
Als wenn diese Gleichung vorkäme $x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{3} xx + \frac{3}{4} x + \frac{1}{18} = o$, so setze man, weil in den Nennern 2 und 3 nebst ihren Potestäten vorkommen $x = \frac{y}{6}$, so wird $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = o$, welche mit 6^4 multiplicirt giebt $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = o$. Wollte man nun suchen ob diese Gleichung Rationalwurzeln habe, so müßte man für y nach und nach die Theiler der Zahl 72 schreiben um zu sehen, in welchen Fällen die Formel wirklich o werde.

197.

Da aber die Wurzeln sowohl negativ als positiv seyn können, so müßte man mit einem jeden Theiler zwey Proben anstellen, die erste indem derselbe positiv, die andere indem derselbe negativ genommen würde: man hat aber auch hier wiederum zu bemerken, daß

so

so oft die zwey Zeichen + und − mit einander abwechseln, die Gleichung eben so viel positive Wurzeln habe; so oft aber einerley Zeichen auf einander folgen, eben so viel negative Wurzeln vorhanden seyn müssen. Da nun in unserm Exempel 4 Abwechselungen vorkommen, und keine Folge, so sind alle Wurzeln positiv, und also hat man nicht nöthig einen Theiler des letzten Glieds negativ zu nehmen.

198.

Es sey z. E. diese Gleichung vorgegeben $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0$. Hier kommen nun zwey Abwechselungen der Zeichen, und auch zwey Folgen vor, woraus man sicher schließen kann, daß diese Gleichung zwey positive und auch zwey negative Wurzeln haben müsse, welche alle Theiler der Zahl 12 seyn müssen. Da nun diese Theiler sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, so probire man erstlich mit $x = +1$ so kommt wirklich 0 heraus, also ist eine Wurzel $x = 1$. Setzt man ferner $x = -1$ so kommt folgendes $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$ und daher giebt $x = -1$ keine Wurzel. Man setze ferner $x = 2$ so wird unsere Formel wieder $= 0$, und also $x = 2$ eine Wurzel; hingegen $x = -2$ geht nicht an. Setzt man weiter $x = 3$ so kommt $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$ geht also auch nicht an: man setze aber $x = -3$ so kommt $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$, folglich ist $x - 3$ eine Wurzel; eben so findet man auch, daß $x = -4$ eine Wurzel seyn werde, also daß alle vier Wurzel Rational sind und sich also verhalten, I.) $x = 1$, II.) $x = 2$, III.) $x = -3$, IV.) $x = -4$, von welchen zwey positiv und zwey negativ sind, wie die obige Regel anzeigt.

199.

Wenn aber keine Wurzel Rational ist, so läßt sich auch durch diesen Weg keine finden: daher man auf

solche Mittel bedacht gewesen, um in diesen Fällen die Irrationalwurzeln ausdrücken zu können. Hierinn ist man auch so glücklich gewesen, daß man zweyerley verschiedene Wege entdeckt habe, um zur Erkenntniß solcher Wurzeln zu gelangen, die biquadratische Gleichung mag auch beschaffen seyn wie sie wolle.

Ehe wir aber diese allgemeine Wege erörtern, so wird es dienlich seyn einige besondere Fälle aufzulösen, welche öfters mit Nutzen angebracht werden können.

200.

Wenn die Gleichung so beschaffen ist, daß die Zahlen in den Gliedern rückwärts eben so fortgehen als vorwärts, wie in dieser Gleichung geschiehet:
$x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0$, welche noch etwas allgemeiner also vorgestellt werden kann:
$x^4 + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0$. So kann eine solche Form allezeit als ein Product zweyer Factoren, welche quadratische Formeln sind, angesehen werden und die sich leicht bestimmen lassen: denn man setze für diese Gleichung folgendes Product $(xx + pax + aa)$ $(xx + qax + aa) = 0$, wo p und q gesucht werden müssen, daß die obige Gleichung heraus komme. Es wird aber durch die wirkliche Multiplication gefunden
$x^4 + (p + q)\,ax^3 + (pq + 2)\,aaxx + (p + q)\,a^3x + a^4 = 0$; damit also diese Gleichung mit der vorgegebenen einerley sey, so werden folgende zwey Stücke erfordert I.) daß $p + q = m$, und II.) daß $pq + 2 = n$, folglich $pq = n - 2$.

Die erstere quadrirt giebt $pp + 2pq + qq = mm$, davon die andere viermal genommen, nämlich $4pq = 4n - 8$, subtrahirt bleibt über $pp - 2pq + qq = mm - 4n + 8$: davon die Quadratwurzel ist: $p - q = \sqrt{(mm - 4n + 8)}$. Da nun $p + q = m$

so

so erhalten wir durch die Addition $2p = m + r(mm - 4n + 8)$ oder $p = \frac{m + r(mm-4n+8)}{2}$; durch die Subtraction aber bekommen wir $2q = m - r(mm - 4n + 8)$ oder $q = \frac{m - r(mm-4n+8)}{2}$. Hat man nun p und q gefunden, so darf man nur einen jeden der Factoren $= o$ setzen, um daraus die Werthe von x zu finden:

der erste giebt $xx + pax + aa = o$ oder $xx = -pax - aa$,

woraus man findet $x = -\frac{pa}{2} \pm r\left(\frac{ppaa}{4} - aa\right)$

oder $x = -\frac{pa}{2} \pm ar\left(\frac{pp}{4} - 1\right)$ oder $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2}ar(pp - 4)$; der andere Factor giebt aber $x = -\frac{aa}{2} \pm \frac{1}{2}ar(qq - 4)$ und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

201.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = o$. Hier ist nun $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, daher $mm - 4n + 8 = 36$ und die Quadratwurzel daraus $= 6$; daher bekommen wir $p = -\frac{4+6}{2} = 1$ und $q = -\frac{4-6}{2} = -5$, woraus die vier Wurzeln seyn werden; I.) und II.) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}r - 3 = -\frac{1 \pm r - 3}{2}$; und ferner die III.) und IV.) $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}r\,21 = \frac{5 \pm r\,21}{2}$: also sind die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung folgende

I.) $x = \frac{-1+r-3}{2}$, II.) $x = \frac{-1-r-3}{2}$,

III.) $x = \frac{5+r\,21}{2}$, IV.) $x = \frac{5-r\,21}{2}$,

wovon die zwey ersten imaginär oder unmöglich sind, die beyden andern aber möglich, weil man r 21 so genau anzeigen kann als man will, indem man die Wurzel durch Decimalbrüche ausdrückt. Denn da 21 so viel als 21, ooooooco so ziehe man daraus die Quadratwurzel wie folget:

```
21 |00|00|00|00|4. 5825
16|
---
  |500
85|425
---
  |7500
908|7264
---
  |23600
9162|18324
---
  |527600
91645|458225
---
69375
```

Da nun r 21 = 4, 5825 so ist die dritte Wurzel ziemlich genau x = 4, 7912, und die vierte x = o, 2087 welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.

Weil die vierte Wurzel dem $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kommt, so wird dieser Werth der Gleichung auch ziemlich genau ein Genüge leisten; man setze also $x = \frac{1}{5}$ so bekommt man $\frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{5} - \frac{4}{1}\frac{4}{2}\frac{4}{5} - \frac{3}{2}\frac{3}{5} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{3}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{5}$ und dieses sollte = o seyn, welches ziemlich genau eintrifft.

202.

Der zweyte Fall, wo eine ähnliche Auflösung statt findet, ist den Zahlen nach dem vorigen gleich, nur daß

daß das zweyte und vierte Glied verschiedene Zeichen haben: eine solche Gleichung ist demnach:
$x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x^3 + a^4 = o$ welche durch folgendes Product kann vorgestellet werden $(xx + pax - aa)\ (xx + qax - aa) = o$. Denn durch die Multiplication bekommt man $x^4 + (p + q)\ ax^3 + (pq - 2)\ aaxx - (p + q)\ a^3x + a^4$ welche mit der vorgegebenen einerley wird, wenn erstlich $p + q = m$ und hernach $pq - 2 = n$ oder $pq = n + 2$; denn solcher gestalt wird das vierte Glied von selbst einerley: man quadrire wie vor die erste Gleichung, so hat man $pp + 2pq + qq = mm$, davon subtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, so bekommt man $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$ woraus die Quadratwurzel giebt
$p - q = \sqrt{(mm - 4n - 8)}$, und daher erhalten wir
$p = \frac{m + \sqrt{(mm - 4n - 8)}}{2}$ und $q = \frac{m - \sqrt{(mm - 4n - 8)}}{2}$.
Hat man nun p und q gefunden so giebt der erste Factor diese zwey Wurzeln $x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(pp + 4)}$ und der zweyte Factor giebt diese $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(qq + 4)}$ und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

203.

Es sey z. E. diese Gleichung gegeben $x^4 - 3.2x^3 + 3.8x + 16 = o$, hier ist nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = o$, daher $\sqrt{(mm - 4n - 8)} = 1$, folglich $p = \frac{-3 + 1}{2} = -1$, und $q = \frac{-3 - 1}{2} = -2$ woraus die zwey erstern Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{5}$ und die zwey letztern $x = 2 \pm \sqrt{8}$ also daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden: I.) $x = 1 + \sqrt{5}$, II.) $x = 1 - \sqrt{5}$, III.) $x = 2 + \sqrt{8}$, IV.) $x = 2 - \sqrt{8}$. Woraus die

die vier Factoren unserer Gleichung seyn werden $(x-1-\sqrt{5})\,(x-1+\sqrt{5})\,(x-2-\sqrt{8})\,(x-2+\sqrt{8})$, welche wirklich mit einander multiplicirt unsere Gleichung hervorbringen müssen. Denn der erste und zweyte mit einander multiplicirt geben $xx-2x-4$ und die beyden andern geben $xx-4x-4$, welche zwey Producte wiederum mit einander multiplicirt geben $x^4-6x^3+24x+16$, welches just die vorgegebene Gleichung ist.

Capitel 14.

Von des Pombelli Regel die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf Cubische zu bringen.

204.

Da schon oben gezeigt worden, wie die cubische Gleichungen durch Hülfe des Cardani Regel aufgelöst werden können, so kommt die Hauptsache bey den biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf cubische Gleichungen zu bringen wisse. Denn ohne Hülfe der cubischen Gleichungen ist nicht möglich die biquadratische auf eine allgemeine Art aufzulösen: denn wenn man auch eine Wurzel gefunden, so erfordern die übrigen Wurzeln eine cubische Gleichung. Woraus man sogleich erkennet, daß auch die Gleichungen von einem höheren Grade die Auflösung aller niedrigen voraus setzen.

205.

Hierzu hat nun schon vor etlichen 100 Jahren ein Italiener, Namens Pombelli, eine Regel gegeben, welche wir in diesem Capitel vortragen wollen:

Es

Es sey demnach die allgemeine biquadratische Gleichung gegeben $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = o$, wo die Buchstaben a, b, c, d alle nur ersinnliche Zahlen bedeuten können: nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden einerley sey
$(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = o$, wo es nur darauf ankommt die Buchstaben p und q und r so zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskommt. Bringt man nun diese letztere in Ordnung, so kommt heraus

$$x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx + apx + pp$$
$$+ 2pxx - 2qrx - rr$$
$$- qq\,xx$$

Hier sind nun die zwey ersten Glieder mit unserer Gleichung schon einerley; für das dritte Glied muß man setzen $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, woraus man hat $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$, für das vierte Glied muß man setzen $ap - 2qr = c$, woraus man hat $2qr = ap - c$ für das letzte Glied aber $pp - rr = d$, woraus wird $rr = pp - d$. Aus diesen drey Gleichungen müssen nun die drey Buchstaben p, q und r bestimmt werden.

206.

Um dieses auf die leichteste Art zu verrichten, so nehme man die erste viermal, welche seyn wird $4qq = aa + 8p - 4b$, diese multiplicire man mit der letzten $rr = pp - d$, so bekommt man:
$4qq\,rr = 8p^3 + (aa - 4b)\,pp - 8dp - d\,(aa - 4b)$
nun quadrire man die mittlere Gleichung $4qq\,rr = aa\,pp - 2acp + cc$: wir haben also zweyerley Werthe für $4qq\,rr$, welche einander gleich gesetzt diese Gleichung geben $8p^3 + (aa - 4b)\,pp - 8dp - d\,(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc$; und alle Glieder auf eine Seite gebracht, geben $8p^3 - 4b\,pp + (2ac - 8d)\,p - aad + 4bd - cc$ welches eine cubische Gleichung ist, daraus

aus in einem jeden Fall der Werth von p nach den oben gegebenen Regeln bestimmt werden muß.

207.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c, d die drey Werthe des Buchstaben p gefunden, worzu es genung ist nur einen davon entdeckt zu haben, so erhält man daraus so gleich die beyden andern Buchstaben q und r. Denn aus der ersten Gleichung wird seyn $q = r\ (\frac{1}{4}\,aa + 2p - b)$ und aus der zweyten erhält man $r = \frac{ap - c}{2q}$. Wenn aber diese drey Buchstaben für einen jeglichen Fall gefunden worden, so können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgender Gestalt bestimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf diese Form gebracht haben $(xx + \frac{1}{2}\,ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, so ist $(xx + \frac{1}{2}\,ax + p)^2 = (qx + r)^2$; daraus die Quadratwurzel gezogen wird $xx + \frac{1}{2}\,ax + p = qx + r$, oder auch $xx + \frac{1}{2}\,ax + p = -qx - r$.
Die erstere giebt $xx = (q - \frac{1}{2}\,a)\,x - p + r$ woraus zwey Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwey werden aber aus der andern gefunden, welche also aussieht $xx = -(q + \frac{1}{2}\,a)\,x - p - r$.

208.

Um diese Regel mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0$, welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen giebt $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$ aus welchen für den Buchstaben p zu bestimmen folgende Gleichung erwächst $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$; welche durch vier dividirt giebt $2p^3 - 35pp + 202d - 385 = 0$. Die Theiler der letzten Zahl sind

1, 5, 7,

1, 5, 7, 11, 2c. von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p = 5$, so kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, folglich ist $p = 5$: will man auch setzen $p = 7$, so kommt $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; also ist $p = 7$ die zweyte Wurzel. Um die dritte zu finden, so dividire man die Gleichung durch 2, so kommt $p^3 - \frac{5}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$, und da die Zahl im zweyten Glied $\frac{5}{2}$ die Summe aller drey Wurzeln ist, die beyden erstern aber zusammen 12 machen, so muß die dritte seyn $\frac{1}{2}$. Also haben wir alle drey Wurzeln. Es wäre aber genung nur eine zu wissen, weil aus einer jeden die vier Wurzeln unserer biquadratischen Gleichung herauskommen müssen.

209.

Um dieses zu zeigen, so sey erstlich $p = 5$, daraus wird alsdenn $q = r(25 + 10 - 35) = 0$ und $r = -\frac{50 + 50}{0} = \frac{0}{0}$. Da nun hierdurch nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$: daher unsere beyde Quadratgleichungen seyn werden:

I.) $xx = 5x - 4$, II.) $xx = 5x - 6$

die erstere giebt nun diese zwey Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm r\frac{9}{4}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$:

Die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm r\frac{1}{4}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$, oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p = 7$, so wird $q = r(25 + 14 - 35) = 2$ und $r = \frac{-70 + 50}{4} = -5$ woraus diese zwey Quadratgleichungen entstehen

I.) xx

I.) $xx = 7x - 12$ II.) $xx = 3x - 2$; deren erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$, daher $x = 4$ und $x = 3$: die andere giebt diese Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{2}$, daher $x = 2$ und $x = 1$, welches eben die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden. Und eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werthe $p = \frac{11}{2}$. Denn da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die beyden quadratischen Gleichungen seyn werden.

I.) $xx = 6x - 8$, II.) $xx = 4x - 3$:
aus der ersteren bekommt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der andern aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also $x = 3$ und $x = 1$, welche die schon gefundene vier Wurzeln sind.

210.

Es sey ferner diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 16x - 12 = 0$, in welcher ist $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$; daher unsere cubische Gleichung seyn wird $8p^3 + 96p - 256 = 0$, das ist $p^3 + 12p - 32 = 0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wenn man setzt $p = 2t$; da wird nämlich $8t^3 + 24t - 32 = 0$, oder $t^3 + 3t - 4 = 0$. Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, aus welchen $t = 1$ eine Wurzel ist, daraus wird $p = 2$ und ferner $q = \sqrt{4} = 2$ und $r = \frac{16}{4} = 4$. Daher sind die beyden Quadratgleichungen $xx = 2x + 2$ und $xx = -2x - 6$, daher die Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{3}$, und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

211.

Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, so wollen wir dieselbe bey dem folgenden Exempel ganz wiederholen:

Es

Es sey demnach diese Gleichung gegeben $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, welche in dieser Formel enthalten seyn soll $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im ersten Theil $-3x$ gesetzt worden, weil -3 die Hälfte ist der Zahl -6 im zweyten Glied der Gleichung. Diese Form aber entwickelt giebt $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)\,xx - (6p + 2qr)\,x + pp - rr = 0$, mit dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung, so bekommt man:

I.) $2p + 9 - qq = 12$, II.) $6p + 2qr = 12$, III.) $pp - rr = 4$; aus der ersten erhalten wir $qq = 2p - 3$, aus der zweyten $2qr = 12 - 6p$ oder $qr = 6 - 3p$, aus der dritten $rr = pp - 4$: nun multiplicire man rr und qq mit einander, so bekommt man $qq\,rr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kommt $qq\,rr = 36 - 36p + 9pp$: daher erhalten wir diese Gleichung: $2p^3 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, oder $2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0$, oder durch 2 dividirt diese $p^3 - 6pp + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel ist $p = 2$; daraus wird $qq = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$. Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, daraus die Quadratwurzel $xx - 3x + 2 = \pm x$: gilt das obere Zeichen, so hat man $xx = 4x - 2$, für das untere Zeichen aber $xx = 2x - 2$: woraus diese vier Wurzeln gefunden werden $x = 2 \pm \sqrt{2}$, und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

Capitel 15.

Von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

212.

Wie durch die obige Regel des Pombelli die biquadratischen Gleichungen durch Hülfe einer cubischen aufgelöst werden, so ist seit dem noch ein anderer Weg gefunden worden eben dieses zu leisten, welcher von dem vorigen gänzlich unterschieden ist, und eine besondere Erklärung verdienet.

213.

Man setze nämlich, die Wurzel einer biquadratischen Gleichung habe diese Form $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo die Buchstaben p, q und r die drey Wurzeln einer solchen cubischen Gleichung andeuten.

$z^3 - fzz + gz - h = 0$, also daß seyn wird $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ und $pqr = h$: dieses vorausgesetzt, so quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, da kommt heraus $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Da nun $p + q + r = f$, so wird $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$: nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird $x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}$. Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, so wird $x^4 - 2fxx + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}$. $(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$; da aber $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$ und $pqr = h$, also $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$, so gelangen wir zu dieser biquadratischen Gleichung $x^4 - 2fxx - 8x\sqrt{h} + ff - 4g = 0$, wovon die Wur-

zel

zel gewiß ist $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, und wo p, q und r die drey Wurzeln sind der obigen cubischen Gleichung.

$$z^3 - fzz + gz - h = o$$

214.

Die herausgebrachte biquadratische Gleichung kann als allgemein angesehen werden, obgleich das zweyte Glied x^3 darinn mangelt. Denn man kann immer eine jede vollständige Gleichung in eine andere verwandeln, wo das zweyte Glied fehlt, wie wir hernach zeigen wollen.

Es sey demnach diese biquadratische Gleichung gegeben: $x^4 - axx - bx - c = o$, wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Man vergleiche dieselbe daher mit der gefundenen Form, um dadurch die Buchstaben f, g und h zu bestimmen. Darzu wird erfordert, daß I.) $2f = a$ also $f = \frac{a}{2}$, II.) $8\sqrt{h} = b$ also $h = \frac{bb}{64}$ III.) $ff - 4g = -c$ oder, $\frac{aa}{4} - 4g + c = o$, oder $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, folglich $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

215.

Aus der vorgegebenen Gleichung $x^4 - axx - bx - c = o$ findet man demnach die Buchstaben f, g und h also bestimmt $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$, und $h = \frac{1}{64}bb$ oder $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; daraus formire man diese cubische Gleichung: $z^3 - fzz + gz - h = o$, wovon man nach der obigen Regel die drey Wurzeln suchen muß. Dieselben seyn nun I.) $z = p$, II.) $z = q$, III.) $z = r$: aus welchen, wenn sie gefunden worden, eine Wurzel unserer biquadratischen Gleichung seyn wird $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

216.

Solcher Gestalt scheint es zwar, daß nur eine Wurzel unserer Gleichung gefunden werde, allein da ein

jedes Quadratwurzel-Zeichen sowohl negativ als positiv genommen werden kann, so enthält diese Form so gar alle vier Wurzeln.

Wollte man zwar alle Veränderungen der Zeichen gelten lassen, so kämen 8 verschiedene Werthe für x heraus, wovon doch nur 4 gelten können. Es ist aber zu bemerken, daß das Product dieser drey Glieder, nämlich r pqr gleich seyn müsse den r h $= \frac{1}{8}$ b; daher wenn $\frac{1}{8}$ b positiv ist, so muß das Product der Theile auch positiv seyn, in welchem Fall nur diese vier Aenderungen gelten.

I.) $x = r\,p + r\,q + r\,r$,

II.) $x = r\,p - r\,q - r\,r$,

III.) $x = -r\,p + r\,q - r\,r$,

IV.) $x = -r\,p - r\,q + r\,r$,

ist aber $\frac{1}{8}$ b negativ, so sind die 4 Werthe von x folgende:

I.) $x = r\,p + r\,q - r\,r$,

II.) $x = r\,p - r\,q + r\,r$,

III.) $x = -r\,p + r\,q + r\,r$,

IV.) $x = -r\,p - r\,q - r\,r$.

Durch Hülfe dieser Anmerkung können in jeglichem Fall alle vier Wurzeln bestimmt werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

217.

Es sey diese biquadratische Gleichung vorgegeben in welcher das zweyte Glied fehlt $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$, welche mit der obigen Formel verglichen giebt $a = 25$, $b = -60$ und $c = 36$, woraus man ferner

ner erhält $f = \frac{2}{2}^5$, $g = \frac{6}{1}\frac{2}{6}^5 + 9 = \frac{7}{1}\frac{6}{6}^9$ und $h = \frac{225}{4}$: also ist unsere cubische Gleichung

$$z^3 - \frac{2}{2}^5 zz + \frac{7}{1}\frac{6}{6}^9 z - \frac{225}{4} = 0.$$

Um hier die Brüche wegzubringen, so setze man $z = \frac{u}{4}$ so wird $\frac{u^3}{64} = \frac{2}{2}^5 . \frac{uu}{16} + \frac{7}{1}\frac{6}{6}^9 . \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, welche mit 64 multiplicirt giebt $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0$, wovon die drey Wurzeln gefunden werden sollen, welche alle drey positiv sind, und wovon eine Wnrzel ist $u = 9$, um die andere zu finden, so theile man $u^3 - 50uu + 769u - 3600$ durch $u - 9$, und da kommt diese neue Gleichung $uu - 41u + 400 = 0$, oder $uu = 41u - 400$, woraus gefunden wird $u = \frac{4}{2}^1 \pm r\left(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}\right)$ $= \frac{41 \pm 9}{2}$: also sind die drey Wurzeln $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$, daher wir erhalten:

I.) $z = \frac{9}{4}$, II.) $z = 4$, III.) $z = \frac{2}{4}^5$.

Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben p, q und r, also daß $p = \frac{9}{4}$, $q = 4$, $r = \frac{2}{4}^5$; weil nun r pqr $= r$ h $= -\frac{1}{2}^5$, und dieser Werth $= \frac{1}{2}$ b negativ ist, so muß man sich mit den Zeichen der Wurzeln r p, r q, r r, darnach richten: es muß nämlich entweder nur ein minus oder drey minus vorhanden seyn: da nun r p $= \frac{3}{2}$ r q $= 2$ und r r $= \frac{5}{2}$, so werden die vier Wurzeln unserer vorgegebenen Gleichung seyn:

I.) $x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$,
II.) $x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$,
III.) $x = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$,
IV.) $x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6$,

aus welchen diese vier Factoren der Gleichung entstehen $(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0$, wovon die beyde ersten geben $xx-3x+2$, die beyden letztern aber $xx+3x-18$, und diese zwey Producte mit einander multiplicirt bringen just unsere Gleichung hervor.

218.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie eine biquadratische Gleichung, in der das zweyte Glied vorhanden ist, in eine andere verwandelt werden könne, darinn das zweyte Glied fehlt, worzu folgende Regel dienet.

Es sey diese allgemeine Gleichung gegeben $y^4+ay^3+byy+cy+d=0$. Hier setze man zu y den vierten Theil der Zahl des andern Glieds, nämlich $\frac{1}{4}a$, und schreibe dafür einen neuen Buchstaben x, also daß $y+\frac{1}{4}a=x$ folglich $y=x-\frac{1}{4}a$; daraus wird $yy=xx-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}aa$, ferner $y^3=x^3-\frac{3}{4}axx+\frac{5}{16}aax-\frac{1}{64}a^3$, und daraus endlich:

$$\begin{array}{rrrrrr}
y^4 = & x^4 & -ax^3 & +\frac{3}{8}aaxx & -\frac{1}{16}a^3x & +\frac{1}{256}a^4 \\
+ay^3 = & +ax^3 & -\frac{3}{4}aaxx & +\frac{3}{16}a^3x & -\frac{1}{64}a^4 & \\
+byy = & & +bxx & -\frac{1}{2}abx & +\frac{1}{16}aab & \\
+cy = & & & +cx & -\frac{1}{4}ac & \\
+d = & & & & +d &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
x^4 & +0-\frac{3}{8}aaxx & +\frac{1}{8}a^3x & -\frac{5}{256}a^4 & \\
 & +bxx & -\frac{1}{2}abx & +\frac{1}{16}aab & \\
 & & +cx & -\frac{1}{4}ac & \\
 & & & +d &
\end{array}\right\}=0$$

in welcher Gleichung, wie man sieht, das zweyte Glied weggefallen ist, also daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden, und daraus die vier Wurzeln von x bestimmen kann, aus welchen hernach die vier Werthe von y von selbst sich ergeben, weil $y=x-\frac{1}{4}a$.

219. So

219.

So weit ist man bisher in Auflösung der algebraischen Gleichungen gekommen, nämlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen die Gleichungen von fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder zum wenigsten auf die niedrigsten Grade zu bringen sind fruchtlos gewesen, also daß man nicht im Stand ist allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen ausfindig gemacht werden könnten.

Alles, was darinnen geleistet worden, geht nur auf ganz besondere Fälle, worunter derjenige der vornehmste ist, wenn irgend eine Rationalwurzel statt findet, als welche durch probiren leicht heraus gebracht werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Glieds seyn muß: und hiermit ist es eben so beschaffen, wie wir schon bey den Gleichungen vom dritten und vierten Grad gelehret haben.

220.

Es wird doch noch nöthig seyn diese Regel auch auf eine solche Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational sind:

Eine solche Gleichung sey nun diese $y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0$. Hier muß man vor allen Dingen das zweyte Glied wegschaffen, daher setze man zu der Wurzel y noch den vierten Theil der Zahl des zweyten Glieds, nämlich $y - 2 = x$, so wird

$y = x + 2$ und $yy = xx + 4x + 4$, ferner $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$.

und $y^4 = x^4 + 8x^3 + 24xx + 32x + 16$

$-8y^3 = \quad -8x^3 - 48xx - 96x - 64$

$+14yy = \quad +14xx + 56x + 56$

$+4y = \quad +4x + 8$

$-8 = \quad -8$

$x^4 + 0 - 10xx - 4x + 8 = 0,$

welche mit unserer allgemeinen Form verglichen, giebt $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; woraus wir demnach schließen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ und $r\,h = \frac{1}{2}$. Daraus wir sehen, daß das Product $r\,pqr$, positiv seyn wird. Die cubische Gleichung wird demnach seyn $z^3 - 5zz + \frac{17}{4} z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher cubischen Gleichung die drey Wurzeln p, q und r gesucht werden müssen.

221.

Hier müssen nun erstlich die Brüche weggeschafft werden, deswegen setze man $z = \frac{u}{2}$ so wird $\frac{u^3}{8} = \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, mit 8 multiplicirt giebt $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun die Theiler des letzten Glieds sind 1 und 2, so sey erstlich $u = 1$, da wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$, und also nicht 0, setzt man aber $u = 2$, so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$, welches ein Genüge leistet. Daher ist eine Wurzel $u = 2$: um die andere zu finden, so theile man durch $u - 2$ wie folget:

$$\begin{array}{r|l} u-2) \; u^3 - 10uu + 17u - 2 & (uu - 8u + 1 \\ \underline{u^3 - 2uu} & \\ -8uu + 17u & \\ \underline{-8uu + 16u} & \\ u - 2 & \\ \underline{u - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

und da bekommt man $uu - 8u + 1 = 0$, oder $uu = 8u - 1$, woraus die beyden übrigen Wurzeln sind $u = 4 \pm r\,15$. Da nun $z = \frac{1}{2} u$, so sind die drey Wurzeln der cubischen Gleichung:

I.) $z =$

I.) $z = p = 1$, II.) $z = q = \frac{4 + r\,15}{2}$, III.) $z = r = \frac{4 - r\,15}{2}$.

222.

Da wir nun p, q und r gefunden, so werden ihre Quadratwurzeln seyn $r\,p = 1$, $r\,q = \frac{r(8 + 2r\,15)}{2}$ $r\,r = \frac{r(8 - 2r\,15)}{2}$.

Aus demjenigen aber, was oben ist gezeigt worden, da die Quadratwurzel aus $(a \pm r\,b)$, wenn $r(aa - b) = c$, also ausgedrückt worden $r(a \pm b) = r\frac{a+c}{2} \pm r\frac{a-c}{2}$, so ist für unsern Fall $a = 8$ und $r\,b = 2r\,15$, folglich $b = 60$, daher $c = 2$, hieraus bekommen wir $r(8 + 2r\,15) = r\,5 + r\,3$, und $r(8 - 2r\,15) = r\,5 - r\,3$. Da wir nun gefunden haben $r\,p = 1$, $r\,q = \frac{r\,5 + r\,3}{2}$ und $r\,r = \frac{r\,5 - r\,3}{2}$, so werden die vier Werthe für x, da wir wissen, daß derselben Product positiv seyn muß, folgender Gestalt beschaffen seyn.

I.) $x = r\,p + r\,q + r\,r = 1 + \frac{r\,5 + r\,3 + r\,5 - r\,3}{2} = 1 + r\,5$.

II.) $x = r\,p - r\,q - r\,r = 1 - \frac{r\,5 - r\,3 - r\,5 + r\,3}{2} = 1 - r\,5$

III.) $x=-rp+rq-rr=-1+\frac{r5+r3-r5+r3}{2}$

$=-1+r3.$

IV.) $x=-rp-rq+rr=-1-\frac{r5-r3+r5-r3}{2}$

$=-1-r3.$

Da nun für die gegebene Gleichung $y=x+3$ war, so sind die vier Wurzeln derselben

I.) $y=3+r5,$
II.) $y=3-r5,$
III.) $y=1+r3,$
IV.) $y=1-r3.$

Capitel 16.

Von der Auflösung der Gleichungen durch die Näherung.

223.

Wenn die Wurzeln einer Gleichung nicht rational sind, dieselben mögen nun durch Wurzelzeichen ausgedrückt werden können oder nicht, wie bey den höhern Gleichungen geschiehet, so muß man sich begnügen, den Werth derselben durch Näherungen zu bestimmen, dergestalt, daß man dem wahren Werth derselben immer näher komme, bis der Fehler endlich vor nichts zu achten. Es sind zu diesem Ende verschiedene Mittel erfunden worden, wovon wir die vornehmsten hier erklären wollen.

224.

Das erste Mittel besteht darinn, daß man den Werth einer Wurzel schon ziemlich genau erforscht habe, also, daß

daß man wisse daß derselbe z. E. größer sey als 4, und doch kleiner als 5. Alsdenn setze man den Werth der Wurzel = 4 + p, da denn p gewiß einen Bruch bedeuten wird; ist aber p ein Bruch und also kleiner als 1, so ist das Quadrat von p, der Cubus und eine jegliche höhere Potestät noch weit kleiner, daher man dieselbe aus der Rechnung weglassen kann, weil es doch nur auf eine Näherung ankommt. Hat man nun weiter diesen Bruch p nur beynahe bestimmt, so erkennt man die Wurzel 4 + p schon genauer: hieraus erforscht man gleicher gestalt einen noch genauern Werth, und geht solchergestalt so weit fort, bis man der Wahrheit so nahe gekommen, als man wünschet.

225.

Wir wollen dieses zuerst durch ein leichtes Exempel erläutern, und die Wurzel dieser Gleichung xx = 20 durch Näherungen bestimmen.

Hier sieht man nun daß x größer ist als 4, und doch kleiner als 5, daher setze man x = 4 + p, so wird xx = 16 + 8p + pp = 20; weil aber pp sehr klein ist, so lasse man dieses Glied weg, um diese Gleichung zu haben 16 + 8p = 20, oder 8p = 4, daraus wird p = $\frac{1}{2}$ und x = $4\frac{1}{2}$ welches der Wahrheit schon weit näher kommt: man setze daher ferner x = $4\frac{1}{2}$ + p, so ist man gewiß, daß p ein noch weit kleinerer Bruch seyn werde, als vorher; daher pp jetzt mit größerm Recht weggelassen werden könne. Man wird also haben xx = $20\frac{1}{4}$ + 9p = 20, oder 9p = $-\frac{1}{4}$, und also p = $-\frac{1}{36}$, folglich x = $4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$. Wollte man der Wahrheit noch näher kommen, so setze man x = $4\frac{17}{36}$ + p, so bekommt man xx = $20\frac{1}{1296}$ + $8\frac{34}{36}$ p = 20; daher $8\frac{34}{36}$ p = $-\frac{1}{1296}$ mit 36 multiplicirt kommt 322 p = $-\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$ und daraus wird p = $-\frac{1}{36.322} = -\frac{1}{11592}$, folglich x = $4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$, welcher Werth der Wahrheit

heit so nahe kommt, daß der Fehler sicher als nichts angesehen werden kann.

226.

Um dieses allgemeiner zu machen, so sey gegeben diese Gleichung $xx = a$, und man wisse schon, daß x größer ist als n, doch aber kleiner als $n + 1$; man setze also $x = n + p$, also daß p ein Bruch seyn muß, und daher pp als sehr klein verworfen werden kann, daraus bekommt man $xx = nn + 2np = a$, also $2np = a - nn$ und $p = \frac{a - nn}{2n}$, folglich $x = n + \frac{a - nn}{2n} = \frac{nn + a}{2n}$. Kam nun n der Wahrheit schon nahe, so kommt dieser neue Werth $\frac{nn + a}{2n}$ der Wahrheit noch weit näher. Diesen setze man von neuem für n, so wird man der Wahrheit noch näher kommen, und wenn man diesen neuern Werth nochmal für n setzet, so wird man noch näher zutreffen; und solchergestalt kann man fortgehen, so weit man will.

Es sey z. E. $a = 2$, oder man verlangt die Quadratwurzel aus 2 zu wissen: hat man nun dafür schon einen ziemlich nahen Werth gefunden, welcher n gesetzt werde, so wird $\frac{nn + 2}{2n}$ einen noch näheren Werth geben. Es sey daher.

I.) $n = 1$ so wird $x = \frac{3}{2}$

II.) $n = \frac{3}{2}$ so wird $x = \frac{17}{12}$

III.) $n = \frac{17}{12}$ so wird $x = \frac{577}{408}$

welcher letztere Werth dem $\sqrt{2}$ schon so nahe kommt, daß das Quadrat davon $= \frac{332929}{166464}$ nur um $\frac{1}{166464}$ größer ist als 2.

227. Eben

227.

Eben so kann man verfahren, wenn die Cubicwurzel oder eine noch höhere Wurzel durch die Näherung gefunden werden soll.

Es sey gegeben diese cubische Gleichung $x^3 = a$ oder man verlange $\sqrt[3]{a}$ zu finden; dieselbe sey nun beynahem = n und man setze $x = n + p$; so wird, wenn man pp und die höheren Potestäten davon weglässt, $x^3 = n^3 + 3nnp = a$: daher $3nnp = a - n^3$ und $p = \frac{a-n^3}{3nn}$: folglich $x = \frac{2n^3+a}{3nn}$. Kommt also n dem $\sqrt[3]{a}$ schon nahe, so kommt diese Form noch weit näher. Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für n so wird diese Formel der Wahrheit noch weit näher kommen, und so kann man fortgehen so weit als man will.

Es sey z. E. $x^3 = 2$ oder man verlange $\sqrt[3]{2}$ zu finden, welchen die Zahl n schon ziemlich nahe komme, so wird diese Formel $x = \frac{2n^3+2}{3nn}$ noch näher kommen; also setze man.

I.) $n = 1$ so wird $x = \frac{4}{3}$
II.) $n = \frac{4}{3}$ so wird $x = \frac{29}{17}\frac{1}{2}$
III.) $n = \frac{29}{17}\frac{1}{2}$ so wird $x = \frac{15}{11}\frac{52}{28}\frac{21}{16}\frac{30}{13}\frac{89}{42}\frac{96}{90}\frac{6}{4}$.

228.

Diese Methode kann mit gleichem Fortgang gebraucht werden um die Wurzel aus allen Gleichungen durch Näherungen zu finden. Es sey zu diesem Ende die folgende allgemeine cubische Gleichung gegeben $x^3 + axx + bx + c = 0$, wo n einer Wurzel derselben schon ziemlich nahe kommt; man setze daher $x = n - p$ und da p ein Bruch seyn wird, so lasse man

pp und

pp und die höhern Potestäten davon weg; solcher gestalt bekommt man $xx = nn - 2np$ und $x^3 = n^3 - 3nnp$, woraus diese Gleichung entsteht:

$n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0$, oder

$n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp = (3nn + 2an + b)p$: daher $p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}$ und folglich bekommen wir für x folgenden genaueren Werth $x = n - \left(\frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}\right) = \frac{2n^3 + ann - c}{3nn + 2an + b}$.

Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für n, so erhält man dadurch einen, der der Wahrheit noch näher kommt.

229.

Es sey z. E. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = -50$, daher wenn n einer Wurzel schon nahe kommt, so wird ein noch näherer Werth seyn $x = \frac{2n^3 + 2nn + 50}{3nn + 4n + 3}$. Nun aber kommt der Werth $x = 3$ der Wahrheit schon ziemlich nahe; daher setze man $n = 3$ so bekommt man $x = \frac{62}{21}$. Wollte man nun diesen Werth wiederum für n schreiben, so würde man einen neuen Werth bekommen, der der Wahrheit noch weit näher käme.

230.

Von höheren Gleichungen wollen wir nur dieses Exempel beyfügen $x^5 = 6x + 10$ oder $x^5 - 6x - 10 = 0$, wo leicht zu ersehen, daß 1 zu klein und 2 zu groß sey. Es sey aber $x = n$ ein schon naher Werth und man setze $x = n + p$, so wird $x^5 = n^5 + 5n^4p$ und also $n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10$, oder $5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$ und

folg-

folglich $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$ und daher $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$.

Man setze nun $n = 1$ so wird $x = \frac{14}{-1} = -14$, welcher Werth ganz ungeschickt ist, so daher rührt daß der nahe Werth n gar zu klein war, man setze daher $n = 2$ so wird $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, welcher der Wahrheit schon weit näher kommt. Wollte man sich nun die Mühe geben, und für n diesen Bruch $\frac{69}{37}$ schreiben, so würde man zu einem noch weit genauern Werth der Wurzel x gelangen.

231.

Dieses ist nun die bekannteste Art die Wurzeln der Gleichung durch Näherungen zu finden, welche auch in allen Fällen mit Nutzen kann angebracht werden.

Jedoch wollen wir noch eine andere Art anzeigen, welche wegen der Leichtigkeit der Rechnung unsere Aufmerksamkeit verdienet. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man für eine jede Gleichung eine Reihe von Zahlen suche, als a, b, c, &c. die so beschaffen sind, daß ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt den Werth der Wurzel um so viel genauer anzeige, je weiter man diese Reihe Zahlen fortsetzet.

Laßt uns setzen, wir seyn damit schon gekommen bis zu den Gliedern p, q, r, s, t, &c. so muß $\frac{q}{p}$ die Wurzel x schon ziemlich genau anzeigen, oder es wird seyn $\frac{q}{p} = x$ beyläufig.

Eben

Eben so wird man auch haben $\frac{r}{q} = x$, woraus wir durch die Multiplication erhalten $\frac{r}{p} = xx$. Da ferner auch $\frac{s}{r} = x$ so wird ebenfalls $\frac{s}{p} = x^3$, und da weiter $\frac{t}{s} = x$ so wird $\frac{t}{p} = x^4$, und so weiter.

233.

Um dieses zu erläutern, wollen wir mit dieser quadratischen Gleichung anfangen $xx = x + 1$, und in der obgedachten Reihe von Zahlen kämen nun diese Glieder vor p, q, r, s, t, ꝛc. Da nun $\frac{q}{p} = x$ und $\frac{r}{p} = xx$, so erhalten wir daraus diese Gleichung:

$\frac{r}{p} = \frac{p}{q} + 1$ oder $q + p = r$. Eben so wird auch seyn $s = r + q$ und $t = s + r$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied unserer Reihe Zahlen die Summe ist der beyden vorhergehenden, wodurch die Reihe so weit man will leicht kann fortgesetzt werden, wenn man nur einmal die zwey ersten Glieder hat; dieselben aber kann man nach Belieben annehmen. Daher setze man dafür 0, 1, so wird unsere Reihe also heraus kommen:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ꝛc.

wo von den entfernteren Gliedern ein jedes durch das vorhergehende dividirt den Werth für x so viel genauer anzeigen wird, als man die Reihe weiter fortgesetzt. Von Anfang ist zwar der Fehler sehr groß, wird aber je weiter man geht geringer. Diese der Wahrheit immer

mer näher kommende Werthe für x gehen demnach fort wie folget:

$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}$ &c.

wovon z. E. $x = \frac{21}{13}$ giebt $\frac{441}{269} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{269}$, wo der Fehler nur $\frac{1}{13269}$ beträgt, die folgende Brüche aber kommen der Wahrheit immer näher.

233.

Laßt uns nun auch diese Gleichung betrachten $xx = 2x + 1$, und weil allezeit $x = \frac{q}{p}$ und $xx = \frac{r}{p}$, so erhalten wir $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, oder $r = 2q + p$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied doppelt genommen nebst dem vorhergehenden das folgende giebt. Wenn wir also wiederum mit 0, 1 anfangen so bekommen wir folgende Reihe:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, &c.

daher der gesuchte Werth von x immer genauer durch folgende Brüche ausgedrückt wird,

$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169}$, &c. welche folglich dem wahren Werth $x = 1 + \sqrt{2}$ immer näher kommen. Nimmt man nun 1 weg so geben folgende Brüche den Werth von $\sqrt{2}$ immer genauer $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$ &c. von welchen $\frac{99}{70}$ zum Quadrat hat $\frac{9801}{4900}$, so nur um $\frac{1}{4900}$ größer ist als 2.

234.

Bey höhern Gleichungen findet diese Methode ebenfalls statt, als wenn diese cubische Gleichung gegeben wäre:

$x^3 = xx + 2x + 1$ so setze man $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ und

$x^3 = \frac{s}{p}$, und da bekommt man $s = r + 2q + p$, woraus man sieht wie man aus drey Gliedern p, q und r das folgende s finden soll, wo man wiederum den Anfang nach Belieben machen kann, eine solche Reihe wird demnach seyn.

0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, &c.

woraus folgende Brüche den Werth für x immer genauer geben werden.

$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}$, &c.

wovon die ersten gräulich fehlen, dieser aber $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ in der Gleichung giebt $\frac{33175}{1225} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{175}$ wo der Fehler $\frac{13}{1225}$ ist.

235.

Es ist aber hier wohl zu bemerken, daß nicht alle Gleichungen so beschaffen sind, daß man darauf diese Methode anwenden könne; insonderheit wo das zweyte Glied fehlt, kann dieselbe nicht gebraucht werden.

Denn es sey z. E. $xx = 2$ und man wollte setzen $x = \frac{q}{p}$ und $xx = \frac{r}{p}$ so würde man bekommen $\frac{r}{p} = 2$ oder $r = 2p$ das ist $r = 0q + 2p$, woraus diese Reihe Zahlen entstünde:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, &c.

daraus nichts geschlossen werden kann, indem ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, entweder $x = 1$ oder $x = 2$ giebt. Es kann aber diesem geholfen werden, wenn man setzt $x = y - 1$: denn bekommt man $yy + 2y - 1 = 2$, und wenn man hier setzt $y = \frac{q}{p}$

und

und $yy = \frac{r}{p}$ so erhält man die schon oben gegebene Näherung.

236.

Eben so verhält es sich auch mit dieser Gleichung $x^3 = 2$, aus welcher eine solche Reihe Zahlen nicht gefunden wird, die uns den Werth von $\sqrt[3]{2}$ anzeigte. Man darf aber nur setzen $x = y - 1$ um diese Gleichung zu bekommen $y^3 - 3yy + 3y - 1 = 2$, oder $y^3 = 3yy - 3y + 3$. Setzt man nun für die Reihe Zahlen $y = \frac{a}{p}$, $yy = \frac{r}{p}$ und $y^3 = \frac{s}{p}$; so wird seyn $s = 3r - 3q + 3p$; woraus man sieht, wie aus drey Gliedern das folgende zu bestimmen. Man nimmt also die drey ersten Glieder nach Belieben an: als z. E. 0, 0, 1, so bekommt man diese Reihe:

0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324, ꝛc.

wovon die zwey letzten Glieder geben $y = \frac{324}{144}$ und $x = \frac{5}{4}$, welcher Bruch auch der Cubicwurzel aus 2 ziemlich nahe kommt, denn der Cubus von $\frac{5}{4}$ ist $\frac{125}{64}$ dagegen ist $2 = \frac{128}{64}$.

237.

Bey dieser Methode ist noch ferner zu bemerken, daß wenn die Gleichung eine Rationalwurzel hat, und der Anfang der Reihe also angenommen wird, daß daraus diese Wurzel heraus komme, so wird auch ein jegliches Glied derselben, durch das vorhergehende dividirt, eben dieselbe Wurzel genau geben.

Um dieses zu zeigen, so sey diese Gleichung gegeben $xx = x + 2$, worinn eine Wurzel ist $x = 2$; da

man nun für die Reihe diese Formel hat $r = q + 2p$, wenn man den Anfang setzt 1, 2, so erhält man diese Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ꝛc. welches eine geometrische Progression ist, deren Nenner = 2.

Eben dieses erhellet auch aus dieser cubischen Gleichung $x^3 = xx + 3x + 9$, wovon eine Wurzel ist $x = 3$. Setzt man nun für den Anfang der Reihe 1, 3, 9, so findet man aus der Formel $s = r + 3q + 9p$ diese Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ꝛc. welches wieder eine geometrische Progression ist, deren Nenner = 3.

238.

Weicht aber der Anfang der Reihe von dieser Wurzel ab, so folgt daraus nicht, daß man dadurch immer genauer zu derselben Wurzel kommen werde: denn wenn die Gleichung mehr Wurzeln hat, so nähert sich diese Reihe immer nur der größten Wurzel, und die kleinere erhält man nicht anders, als wenn just der Anfang nach derselben eingerichtet wird. Dieses wird durch ein Exempel deutlich werden. Es sey die Gleichung $xx = 4x - 3$, deren zwey Wurzeln sind $x = 1$ und $x = 3$. Nun ist die Formel für die Reihe Zahlen $r = 4q - 3p$ und setzt man für den Anfang derselben 1, 1, nämlich für die kleinere Wurzel, so wird die ganze Reihe 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ꝛc. Setzt man aber den Anfang 1, 3, worinn die größere Wurzel enthalten, so wird die Reihe:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ꝛc. wo alle Glieder die Wurzel 3 genau angeben. Setzt man aber den Anfang anders, wie man will, nur daß darinn die kleinere Wurzel nicht genau enthalten ist, so nähert sich die Reihe immer der größern Wurzel 3, wie aus folgenden Reihen zu sehen:

der Anfang sey 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, ꝛc.
ferner 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, ꝛc.
ferner 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366,
1095, ꝛc.
ferner 2, 1, −2, −11, −38, −118, −362,
−1091, −3278, ꝛc.

wo die letzten Glieder durch die vorhergehenden dividirt immer der größern Wurzel 3 näher kommen, niemals aber der kleinern.

239.

Diese Methode kann auch so gar auf Gleichungen, die in das unendliche fortlaufen, angewendet werden, zum Exempel diene diese Gleichung

$$\infty \quad \infty-1 \quad \infty-2 \quad \infty-3 \quad \infty-4$$
$$x = x + x + x + x + \text{ꝛc.}$$

für welche die Reihe Zahlen so beschaffen seyn muß, daß eine jede gleich sey der Summe aller vorhergehenden, woraus diese Reihe entsteht

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ꝛc.

woraus man sieht, daß die größte Wurzel dieser Gleichung sey $x = 2$, ganz genau; welches auch auf diese Art gezeigt werden kann. Man theile die Gleichung

$$\infty$$

durch x, so bekommt man

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ ꝛc. welches eine geometrische Progression ist, davon die Summe gefunden wird $= \frac{1}{x-1}$ also daß $1 = \frac{1}{x-1}$; multiplicire mit $x-1$, so wird $x-1=1$ und $x=2$.

240.

Außer diesen zwey Methoden die Wurzel der Gleichung durch Näherung zu finden, trifft man hin und wieder noch andere an, welche aber entweder zu mühsam, oder nicht allgemein sind. Vor allen aber verdienet die hier zuerst erklärte Methode den Vorzug, als welche auf alle Arten von Gleichungen mit erwünschtem Erfolg kann angewendet werden, dahingegen die andere öfters eine gewisse Vorbereitung in der Gleichung erfordert, ohne welche dieselbe nicht einmal gebraucht werden kann, wie wir hier bey verschiedenen Exempeln dargethan haben.

Ende des ersten Abschnitts von den Algebraischen Gleichungen, und derselben Auflösung.

Des

Des

Zweyten Theils

Zweyter Abschnitt.

Von

der unbestimmten Analytic.

Des

Zweyten Theils

Erster Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytic.

Capitel I.

Von der Auflösung der einfachen Gleichungen, worinnen mehr als eine unbekannte Zahl vorkommt.

I.

Aus dem obigen ist zu ersehen, wie eine unbekannte Zahl durch eine Gleichung: zwey unbekannte Zahlen aber durch zwey Gleichungen; 3 durch 3; 4 durch 4 und so fort bestimmt werden können; also daß allezeit eben so viel Gleichungen erfordert werden, als unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, wenn anders die Frage selbst bestimmt ist.

Wenn aber weniger Gleichungen aus der Frage gezogen werden können, als unbekannte Zahlen angenommen worden, so bleiben einige unbestimmt und werden unserer Willkühr überlassen; daher solche Fra-

gen unbestimmt genennt werden, und welche einen eigenen Theil der Analytic ausmachen, so die unbestimmte Analytic genennt zu werden pflegt.

2.

Da in diesen Fällen eine oder mehr unbekannte Zahlen nach unserm Belieben angenommen werden können, so finden in der That viele Auflösungen statt.

Allein es wird gemeiniglich diese Bedingung hinzu gefügt, daß die gesuchten Zahlen, ganze und so gar positiv, oder zum wenigsten Rationalzahlen seyn sollen; wodurch die Anzahl aller möglichen Auflösungen ungemein eingeschränkt wird, also daß öfters nur etliche wenige öfters zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Platz finden, bisweilen auch so gar keine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytic öfters ganz besondere Kunstgriffe erfordert, und nicht wenig dienet den Verstand der Anfänger aufzuklären, und denselben eine größere Fertigkeit im Rechnen beyzubringen.

3.

Wir wollen mit einer der leichtesten Fragen den Anfang machen, und zwey Zahlen suchen, deren Summe 10 seyn soll, wobey es sich versteht, daß diese Zahlen ganz Positiv seyn sollen.

Dieselben Zahlen seyn nun x und y, also daß seyn soll $x + y = 10$, woraus gefunden wird $x = 10 - y$, also daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine ganze und positive Zahl seyn soll; man könnte daher für y alle ganze Zahlen, von 1 bis ins unendliche annehmen, da aber x auch positiv seyn muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil sonst x negativ seyn würde; und wenn auch 0 nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil

sonst

sonst $x = o$ würde; woher nur die folgenden Auflösungen Platz haben:

wenn $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
so wird $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letztern mit den vier erstern einerley, daher in allen nur fünf verschiedene Auflösungen statt finden.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine von den hier gefundenen beyden Zahlen noch in zwey Theile zertheilen, woraus man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

4.

Da dieses gar keine Schwierigkeit hat, so wollen wir zu etwas schwereren Fragen fortschreiten.

I. Frage: Man soll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine sich durch 2 der andere aber durch 3 theilen lasse?

Es sey der erste Theil $2x$, der andere $3y$, so muß seyn $2x + 3y = 25$. Also $2x = 25 - 3y$. Man theile durch 2 so kommt $x = \frac{25 - 3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner seyn muß als 25 und daher y nicht größer als 8. Man ziehe so viel ganze daraus als möglich, das ist man theile den Zehler $25 - 3y$ durch den Nenner 2, so wird $x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}$; also muß sich $1 - y$ oder auch $y - 1$ durch 2 theilen lassen. Man setze daher $y - 1 = 2z$ und also $y = 2z + 1$, so wird $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$; weil nun y nicht größer seyn kann als 8, so können auch für z keine andere Zahlen angenommen werden als solche, die $2z + 1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner seyn

als

als 4, daher z nicht größer als 3 genommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man	z = 0,	z = 1,	z = 2,	z = 3.
so wird	y = 1,	y = 3,	y = 5,	y = 7.
und	x = 11,	x = 8,	x = 5,	x = 2.

daher die gesuchten zwey Theile von 25 seyn werden: I.) 22 + 3, II.) 16 + 9, III.) 10 + 15, IV.) 4 + 21.

5.

II. Frage: Man theile 100 in zwey Theile, so daß der erste sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen lasse?

Der erste Theil sey demnach 7x der andere aber 11y, so muß seyn $7x + 11y = 100$; daher

$x = \frac{100 - 11y}{7} = \frac{98 + 2 - 7y - 4y}{7}$, also wird $x = 14 - y + \frac{2 - 4y}{7}$; also muß $2 - 4y$ oder $4y - 2$ sich durch 7 theilen lassen. Läßt sich aber $4y - 2$ durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon $2y - 1$ durch 7 theilen lassen, man setze daher $2y - 1 = 7z$, oder $2y = 7z + 1$, so wird $x = 14 - y - 2z$; da aber seyn muß $2y = 7z + 1 = 6z + z + 1$, so hat man $y = 3z + \frac{z + 1}{2}$.

Nun setze man $z + 1 = 2u$ oder $z = 2u - 1$, so wird $y = 3z + u$. Folglich kann man für u eine jede ganze Zahl nehmen, daraus weder x noch y negativ wird, und alsdenn bekommt man:

$y = 7u - 3$ und $x = 19 - 11u$.

Nach der ersten Formel muß 7u größer seyn als 3, nach der andern aber muß 11u kleiner seyn als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, also daß u nicht einmal 2 seyn kann, da nun u unmöglich nicht 0 seyn kann, so bleibt nur

ein

ein einiger Werth übrig nämlich u = 1, daraus bekommen wir x = 8 und y = 4; daher die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden I. 56 und II. 44.

6.

III. Frage: Man theile 100 in zwey solche Theile, wenn man den ersten theilt durch 5, daß 2 übrig bleiben, und wenn man den zweyten theilt durch 7 daß 4 übrig bleiben?

Da der erste Theil durch 5 dividirt 2 übrig läßt so setze man denselben $5x + 2$, und weil der andere durch 7 dividirt 4 übrig läßt, so setze man denselben $7y + 4$; also wird $5x + 7y + 6 = 100$ oder $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y$, hieraus $x = 18 - y - \frac{2y+4}{3}$; also muß $4 - 2y$, oder $2y - 4$, oder auch die Hälfte davon $y - 2$ durch 5 theilbar seyn. Man setze daher $y - 2 = 5z$ oder $y = 5z + 2$, so wird $x = 16 - 7z$; woraus erhellet daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht größer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen.

I. $z = 0$, giebt $x = 16$, und $y = 2$; woraus die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden $82 + 18$.

II. $z = 1$, giebt $x = 9$, und $y = 7$; woraus die beyden Theile seyn werden $47 + 53$.

III. $z = 2$, giebt $x = 2$, und $y = 12$; woraus die beyden Theile sind $12 + 88$.

7.

IV. Frage: Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer, die erste spricht; wenn ich die meinigen je zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig, die andere spricht: wenn ich die meinigen zu 10 überzähle so bleiben mir auch 7 übrig; wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Zahl der ersten durch 8 dividirt 7 übrig läßt, die Zahl der andern aber durch 10 dividirt auch

7 übrig

7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten $8x+7$, der andern aber $10y+7$, also daß $8x+10y+14=100$, oder $8x=86-10y$, oder $4x=43-5y=40+3-4y-y$; daher setze man $y-3=4z$ so wird $y=4z+3$ und $x=10-4z-3-z=7-5z$, folglich muß $5z$ kleiner seyn als 7 und also z kleiner als 2, woraus diese zwey Auflösungen entspringen:

I. $z=0$, giebt $x=7$, und $y=3$: daher die erste Bäuerinn gehabt hat 63 Eyer, die andere aber 37.

II. $z=1$, giebt $x=2$, und $y=7$; daher die erste Bäuerinn gehabt hat 23 Eyer die andere aber 77.

8.

V. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern haben zusammen verzehrt 1000 Copeken. Ein Mann hat bezahlt 19 Cop. eine Frau aber 13 Cop., wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Männer sey $=x$ der Weiber aber $=y$, so bekommt man diese Gleichung $19x+13y=1000$. Daraus wird $13y=1000-19x$ oder $13y=988+12-13x-6x$, also wird $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; also muß sich $12-6x$ oder $6x-12$, und auch der sechste Theil davon $x-2$ durch 13 theilen lasse. Man setze also $x-2=13z$, so wird $x=13z+2$ und $y=76-13z-2-6z$ oder $y=74-19z$; also muß z kleiner seyn als $\frac{74}{19}$ und folglich kleiner als 4, daher folgende vier Auflösungen Platz finden:

I.) $z=0$, giebt $x=2$ und $y=74$. Also waren 2 Männer und 74 Weiber; jene haben bezahlt 38 Cop. diese aber 962 Cop.

II. $z=1$, giebt die Zahl der Männer $x=15$ und die Zahl der Weiber $y=55$; jene haben verzehrt 285 Cop. diese aber 715 Cop.

III.)

III.) $z=2$, giebt die Zahl der Männer $x=28$ und die Zahl der Weiber $y=36$; jene haben verzehrt 532 Cop. diese aber 468 Cop.

IV. $z=3$, giebt die Zahl der Männer $x=41$, und die Zahl der Weiber $y=17$; jene haben verzehrt 779 Cop. diese aber 221 Cop.

9.

VI.) Frage: Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Rthl. Zahlt für ein Pferd 31 Rthl., für einen Ochsen aber 21 Rthl., wie viel sind es Pferde und Ochsen gewesen?

Die Zahl der Pferde sey $=x$ der Ochsen aber $=y$, so muß seyn: $31x + 21y = 1770$ oder $21y = 1770 - 31x = 1764 + 6 - 21x - 10x$, und also $y = 84 - x + \frac{6-10x}{21}$; daher muß $10x-6$ und also auch die Hälfte $5x-3$ durch 21 theilbar seyn: man setze also $5x-3=21z$, daher $5x=21z+3$ also daß $y=84-x-2z$.

Da nun $x=\frac{21z+3}{5}$ oder $x=4z+\frac{z+3}{5}$, so setze man $z+3=5u$, so wird $z=5u-3$, $x=21u-12$ und $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$; daher u größer seyn muß als 0 und doch kleiner als 4, woraus wir diese drey Auflösungen erhalten:

I.) $u=1$ giebt die Zahl der Pferde $x=9$ und der Ochsen $y=71$; jene haben gekost 279 Rthl. diese aber 1491, zusammen 1770 Rthl.

II.) $u=2$ giebt die Zahl der Pferde $x=30$ und der Ochsen $y=40$; jene haben gekost 930 Rthl. diese aber 840, zusammen 1770 Rthl.

III.) $u=3$ giebt die Zahl der Pferde $x=51$ und der Ochsen $y=9$; jene haben gekost 1581 Rthl. diese aber 189 Rthl. zusammen 1770 Rthl.

10.

Die bisherigen Fragen leiten auf eine solche Gleichung $ax + by = c$, wo a, b, und c ganze und positive Zahlen bedeuten, und für x und y auch ganze und positive Zahlen gefordert werden.

Wenn aber b negativ ist, und die Gleichung eine solche Form erhält $ax = by + c$, so sind die Fragen von einer ganz andern Art, und lassen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode noch in diesem Capitel erkläret werden soll. Die leichtesten Fragen von dieser Art sind dergleichen. Wenn man z. E. zwey Zahlen sucht, deren Differenz seyn soll 6: so setze man die kleinere $= x$ die größere $= y$, und da muß seyn $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$. Hier hindert nun nicht, daß nicht vor x alle mögliche ganze Zahlen sollten genommen werden können, und was man immer vor eine nimmt, so wird y allezeit um 6 größer. Nehme man z. E. $x = 100$ so wäre $y = 106$; woraus ganz klar ist, daß unendlich viel Auflösungen statt finden.

11.

Hernach folgen die Fragen, wo $c = 0$ und ax schlecht weg dem by gleich seyn soll. Man suche nämlich eine Zahl, die sich sowohl durch 5 als auch durch 7 theilen lasse, und setze diese Zahl $= N$, so muß erstlich seyn $N = 5x$, weil die Zahl N durch 5 theilbar seyn soll; hernach muß auch seyn $N = 7y$, weil sich diese Zahl auch durch 7 soll theilen lassen: daher bekommt man $5x = 7y$ und also $x = \frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht theilen läßt durch 5, so muß sich y dadurch theilen lassen. Man setze demnach $y = 5z$, so wird $x = 7z$, daher die gesuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z eine jede ganze Zahl annehmen kann, also daß

für

für N unendlich viel Zahlen angegeben werden können, welche sind:

35, 70, 105, 140, 175, 910, ꝛc.

Wollte man, daß sich die Zahl N noch über dieses durch 9 theilen ließe, so wäre erstlich $N = 35z$, hernach müßte auch seyn $N = 9u$ also $35z = 9u$ und daraus $u = \frac{35z}{9}$: woraus klar ist, daß sich z durch 9 muß theilen lassen. Es sey demnach $z = 9s$, so wird $u = 35s$ und die gesuchte Zahl $N = 315s$.

12.

Mehr Schwierigkeit hat es, wenn die Zahl c nicht o ist, als wenn seyn soll $5x = 7y + 3$, welche Gleichung herauskommt, wenn eine solche Zahl N gefunden werden soll, welche sich erstlich durch 5 theilen lasse; wenn aber dieselbe durch 7 dividirt wird 3 übrig bleiben, denn alsdenn muß seyn $N = 5x$, hernach aber $N = 7y + 3$ und deswegen wird $5x = 7y + 3$ folglich $x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$. Man setze $2y + 3 = 5z$, so wird $x = y + z$; da aber $2y + 3 = 5z$, oder $2y = 5z - 3$, so wird $y = \frac{5z-3}{2}$ oder $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Man setze nun $z - 3 = 2u$, so wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$, und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle ganze Zahlen können angenommen werden, auch so gar negative, wenn nur N positiv wird, welches hier geschiehet wenn $u = -1$, denn da wird $N = 10$; die folgenden erhält man, wenn man dazu immer 35 addirt, daher die gesuchten Zahlen sind 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, ꝛc.

13.

Die Auflösung solcher Fragen beruhet auf die Verhältniß der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit derselben wird die Auflösung bald kürzer bald weitläuftiger: folgende Frage leidet eine kurze Auflösung.

VII. Frage: Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt, 2 übrig lasse, durch 13 aber dividirt 3 übrig lasse?

Diese Zahl sey N, so muß erstlich seyn $N = 6x + 2$, hernach aber $N = 13y + 3$; also wird $6x + 2 = 13y + 3$ und $6x = 13y + 1$, daher $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$. Man setze also $y + 1 = 6z$, so wird $y = 6z - 1$ und $x = 2y + z = 13z - 2$; folglich wird die gesuchte Zahl $N = 78z - 10$. Solche Zahlen sind demnach folgende 68, 146, 224, 302, 380, etc. welche nach einer arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz ist $78 = 6.13$. Wenn man also nur eine von diesen Zahlen weis, so lassen sich alle übrigen leicht finden, indem man nur nöthig hat 78 immer dazu zu addiren, oder auch davon zu subtrahiren, so lange es angeht.

14.

Ein Exempel, wo es schwerer wird, mag folgendes seyn:

VIII. Frage: Man suche eine Zahl N, welche durch 39 dividirt, 16 übrig lasse und durch 56 dividirt, 27 übrig lasse?

Erstlich muß also seyn $N = 39p + 16$ hernach aber $N = 56q + 27$; daher wird $39p + 16 = 56q + 27$,

oder

oder $39p = 56q + 11$ und $p = \frac{56q+11}{39}$, oder $p = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$; also daß $r = \frac{17q+11}{39}$: daher wird

$39r = 17q + 11$ und $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17}$

$= 2r + s$; also daß $s = \frac{5r-11}{17}$ oder $17s = 5r - 11$, daher

wird $r = \frac{17s+11}{5} = 3s + \frac{2s+11}{5} = 3s + t$; also daß

$t = \frac{2s+11}{5}$, oder $5t = 2s + 11$, und so wird $s = \frac{5t-11}{2}$

$= 2t + \frac{t-11}{2} = 2t + u$; also daß $u = \frac{t-11}{2}$ und $t = 2u + 11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden, so kann man u nach Belieben annehmen, und daraus erhalten wir rückwärts folgende Bestimmungen

$t = 2u + 11$

$s = 2t + u = 5u + 22$

$r = 3s + t = 17u + 77$

$q = 2r + s = 30u + 176$

$p = q + r = 56u + 253$

und endlich $N = 39.56u + 9883$. Um die kleinste Zahl für N zu finden, setze man $u = -4$, so wird $N = 1147$: setzt man $u = x - 4$, so wird $N = 2184x - 8736 + 9883$, oder $N = 2184x + 1147$. Diese Zahlen machen demnach eine arithmetische Progression, deren erstes Glied ist 1147 und die Differenz = 2184. Diese Zahlen sind demnach

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, ꝛc.

15.

Zur Uebung wollen wir noch einige Fragen beyfügen:

IX. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirthshause: ein Mann verzehrt 25 Cop. ein Weib aber 16 Cop. und es findet sich, daß die Weiber insgesammt einen Cop. mehr verzehrt haben, als die Männer; wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Weiber sey gewesen = p, der Männer aber = q, so haben die Weiber verzehrt 16 p, die Männer aber 25 q; daher muß seyn $16p = 25q + 1$,

und da wird $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r$;

also daß $r = \frac{9q+1}{16}$ oder $9q = 16r - 1$; daher wird

$q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$, also daß $s = \frac{7r-1}{9}$

oder $9s = 7r - 1$; daher wird $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7}$

$= s + t$, also daß $t = \frac{2s+1}{7}$ oder $7t = 2s + 1$; daher

wird $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{1} = 3t + u$, also daß $u = \frac{t-1}{2}$ oder $2u = t - 1$, daher $t = 2u + 1$.

Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$t = 2u + 1$
$s = 3t + u = 7u + 3$
$r = s + t = 9u + 4$
$q = r + s = 16u + 7$
$p = q + r = 25u + 11$,

daher war die Anzahl der Weiber $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u in ganzen Zahlen an-

neh-

nehmen kann, was man will. Die kleinere Zahlen sind demnach nebst den folgenden wie hier stehet.

Anzahl der Weiber: = 11, 36, 61, 86, 111, ꝛc.
der Männer: = 7, 23, 39, 55, 71, ꝛc.

Nach der ersten Auflösung in die kleinste Zahlen haben die Weiber verzehrt 176 Cop. die Männer aber 175; also die Weiber einen Cop. mehr als die Männer.

16.

X. Frage: Einer kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 31 Rthl. für einen Ochsen aber 20 Rthl. und es findet sich, daß die Ochsen insgesammt 7 Rthl. mehr gekostet haben als die Pferde: wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Es sey die Anzahl der Ochsen = p, der Pferde aber = q, so muß $20p = 31q + 7$ daher $p = \frac{31q+7}{20}$

$= q + \frac{11q+7}{20} = q + r$, daher $20r = 11q + 7$, und

$q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{1} = r + s$; daher $11s = 9r - 7$

und $r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t$, daher $9t = 2s + 7$, und $s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$, daher $2u = t - 7$, und $t = 2u + 7$.

$s = 4t + u = 9u + 28$
$r = s + t = 11u + 35$
$q = r + s = 20u + 63$ Zahl der Pferde
$p = q + r = 31u + 98$ Zahl der Ochsen.

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für p und q, wenn man setzt $u = -3$; die größe-

re steigen nach arithmetischen Progressionen wie folget.

Zahl der Ochsen p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253, ꝛc.

Zahl der Pferde q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163, ꝛc.

17.

Wenn wir bey diesem Exempel erwegen, wie die Buchstaben p und q durch die folgende bestimmt werden, so ist leicht einzusehen, daß solches auf der Verhältniß der Zahlen 31 und 20 beruhet, und zwar auf derjenigen, nach welcher der größte gemeine Theiler dieser beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellet:

20	31	1
	20	
11	20	1
	11	
9	11	1
	9	
2	9	4
	8	
1	2	2
	2	
	0	

Denn hier ist klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben p, q, r, s, ꝛc. vorkommen, und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Hand verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kommt allererst die Zahl 7 zum Vorschein, und zwar mit dem Zeichen plus, weil die letzte Bestimmung die

fünfte

fünfte ist, wäre aber die Zahl derselben gerad gewesen, so hätte – 7 gesetzt werden müssen. Solches wird deutlicher erhellen aus der folgenden Tabelle, wo erstlich die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Bestimmung der Buchstaben p, q, r, ꝛc. vorkommt.

$31 = 1.\ 20 + 11$	$p = 1.\ q + r$
$20 = 1.\ 11 + 9.$	$q = 1.\ r + s$
$11 = 1.\ 9 + 2.$	$r = 1.\ s + t$
$9 = 4.\ 2 + 1.$	$s = 4.\ t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0.$	$t = 2.\ u + 7$

18.

Auf diese Art kann auch das vorhergehende Exempel im 14ten §. vorgestellt werden, wie folget:

$56 = 1.\ 39 + 17$	$p = 1.\ q + r$
$39 = 2.\ 17 + 5$	$q = 2.\ r + s$
$17 = 3.\ 5 + 2$	$r = 3.\ s + t$
$5 = 2.\ 2 + 1$	$s = 2.\ t + u$
$2 = 2.\ 1 + 0$	$t = 2.\ u + 11$

19.

Solchergestalt sind wir im Stande alle dergleichen Exempel auf eine allgemeine Art aufzulösen:

Es sey nämlich gegeben diese Gleichung $bp = aq + n$, wo a, b und n bekannte Zahlen sind. Hier muß man nur eben die Operation anstellen, als wenn man zwischen den Zahlen a und b den größten gemeinen Theiler suchen wollte, aus welchen so gleich p, und q durch die folgende Buchstaben bestimmt werden, wie folget.

Es sey	a = Ab + c	so wird	p = Aq + r
	b = Bc + d		q = Br + s
	c = Cd + e		r = Cs + t
	d = De + f		s = Dt + u
	e = Ef + g		t = Eu + v
	f = Fg + o		u = Fv ± n

Hier wird in der letzten Bestimmung + n genommen, wenn die Anzahl der Bestimmungen ungerad ist, hingegen aber − n; wenn dieselbe Zahl gerade ist. Solchergestalt können nun alle dergleichen Fragen ziemlich geschwind aufgelöset werden, wovon wir einige Exempel geben wollen.

20.

XI. Frage: Es werde eine Zahl gesucht, welche durch 11 dividirt 3 übrig lasse, durch 19 aber 5?

Diese Zahl sey N daher muß erstlich seyn N = 11p + 3 hernach auch N = 19q + 5, daher wird 11p + 3 = 19q + 5 oder 11p = 19p + 2, woraus die folgende Tabelle verfertiget wird.

19 = 1. 11 + 8	p = q + r
11 = 1. 8 + 3	q = r + s
8 = 2. 3 + 2	r = 2s + t
3 = 1. 2 + 1	s = t + u
2 = 2. 1 + o.	t = 2u + 2

Wo man u nach Belieben annehmen kann, und daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts bestimmen, wie folget.

t = 2u + 2
s = t + u = 3u + 2
r = 2s + t = 8u + 6
q = r + s = 11u + 8
p = q + r = 19u + 14

Hier-

hieraus bekommt man die gesuchte Zahl N = 209 u + 157, daher ist die kleinste Zahl für N, 157.

21.

XII. Frage: Man suche eine Zahl N, welche wie vorher durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt 5 übrig lasse; wenn dieselbe aber durch 29 dividirt wird, daß 10 übrig bleiben?

Nach der letzten Bedingung muß seyn N = 29 p + 10, und da die zwey ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben seyn wie oben gefunden worden N = 209 u + 157, wofür wir schreiben wollen N = 209q + 157, daher wird 29 p + 10 = 209q + 157 oder 29 p = 209 q + 147; woraus die folgende Operation angestellet wird

$$\begin{aligned} 209 &= 7.\ 29 + 6; && \text{also } p = 7q + r \\ 29 &= 4.\ 6 + 5; && q = 4r + s \\ 6 &= 1.\ 5 + 1; && r = s + t \\ 5 &= 5.\ 1 + 0; && s = 5t - 147 \end{aligned}$$

von wannen wir folgender Gestalt zurück gehen

$s = 5t - 147$
$r = s + t = 6t - 147$
$q = 4r + s = 29\ t - 735$
$p = 7q + r = 209t - 5292$
daher $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kommt heraus, wenn man setzt $t = 26$, da wird $N = 4128$.

22.

Es ist aber hier wohl zu bemerken, daß wenn eine solche Gleichung $bp = aq + n$ aufgelöst werden soll, die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müssen, denn sonst wäre die Frage unmöglich, wenn nicht die Zahl n eben denselben gemeinen Theiler hätte.

Denn wenn z. E. seyn sollte $9p = 15q + 2$, wo 9 und 15 den gemeinen Theiler 3 haben, wodurch sich 2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich diese Frage aufzulösen, weil $9p - 15q$ allezeit durch 3 theilbar ist und also niemals 2 werden kann, wäre aber in diesem Fall $n = 3$ oder $n = 6$ ꝛc. so wäre die Frage wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da denn herauskäme $3p = 5q + 1$, welche nach der obigen Regel leicht aufgelöset wird. Also sieht man deutlich, daß die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müssen, und daß die vorgegebene Regel in keinen andern Fällen Platz haben kann.

23.

Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach dem natürlichen Weg behandeln. Da wird nun $p = \frac{15q+2}{9} = q + \frac{6q+2}{9}$ $= q + r$, also daß $9r = 6q + 2$ oder $6q = 9r - 2$; daher $q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s$, also daß $3r - 2$ $= 6s$ oder $3r = 6s + 2$; daher $r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$,

welches offenbar niemals eine ganze Zahl werden kann, weil s nothwendig eine ganze Zahl seyn muß, woraus offenbar zu ersehen, daß dergleichen Fragen ihrer Natur nach unmöglich sind.

Capis

Capitel 2.

Von der so genannten Regel-Coeci, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehr unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen.

24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen, dergestalt daß dafür ganze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen vorgegeben und die Frage soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als zwey unbekannte Zahlen vorkommen. Dergleichen Fragen kommen in den gemeinen Rechenbüchern vor, und pflegen nach der so genannten Regel-Coeci aufgelöst zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen wollen.

25.

Wir wollen mit einem Exempel den Anfang machen:

I. Frage: 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirthshause 50 Rthl. daran zahlt ein Mann 3 Rthl. ein Weib 2 Rthl. und ein Kind 1 Rthl. wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer $= p$, der Weiber $= q$, und der Kinder $= r$, so erhält man die zwey folgende Gleichungen, I.) $p+q+r=30$. II.) $3p+2q+r=50$; aus welchen die drey Buchstaben p, q, und r in ganzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r=30-p-q$, und deswegen muß $p+q$ kleiner seyn als 30: dieser Werth in der andern

für

für r geschrieben, giebt $2p + q + 30 = 50$, also $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches von selbst kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entspringen.

Zahl der Männer $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$

der Weiber $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0$

der Kinder $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,$

läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 wahre Auflösungen übrig.

26.

II. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh, Schweine Ziegen und Schafe, für 100 Rthl. kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Rthl. eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Rthl. ein Schaf $\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel waren es von jeder Gattung?

Die Zahl der Schweine sey = p, der Ziegen = q, der Schafe = r, so hat man folgende zwey Gleichungen I.) $p + q + r = 100$, II.) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$; diese letztere multiplicirt man mit 6, um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der andern gesetzt giebt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$; also muß 18 p durch 5 theilbar seyn, oder 5 als einen Factor in sich schließen. Man setze also $p = 5s$, so wird $q = 60 - 18s$ und $r = 138 + 40$, wo für s eine beliebige ganze Zahl genommen werden kann, doch so, daß q nicht negativ werde, daher s nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also wenn o auch ausgeschlossen wird, nur folgende drey Auflösungen statt finden:

näm-

nämlich wenn $s = 1, 2, 3.$

so wird $p = 5, 10, 15.$
$q = 42, 24, 16.$
$r = 53, 66, 79.$

27.

Wenn man dergleichen Exempel selbst vorgeben will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen, daß dieselben möglich sind: um nun davon zu urtheilen, so ist folgendes zu bemerken:

Es seyn die beyden Gleichungen, dergleichen wir bisher gehabt, also vorgestellet I.) $x + y + z = a$, II.) $fx + gy + hz = b$, wo f, g, h, nebst a und b gegebene Zahlen sind: nun sey unter den Zahlen f, g und h die erste f die größte und h die kleinste, da $x + y + z = a$, so wird $fx + fy + fz = fa$. Nun ist $fx + fy + fz$ größer als $fx + gy + hz$, daher muß fa größer seyn als b, oder b muß kleiner seyn als fa; und da ferner $hx + hy + hz = ha$ und $hx + hy + hz$ gewiß kleiner ist als $fx + gy + hz$, so muß auch ha kleiner seyn als b, oder b größer als ha. Wofern demnach die Zahl b nicht kleiner als fa und zugleich größer als ha, so ist die Frage immer unmöglich.

Diese Bedingung pflegt auch also vorgetragen zu werden, daß die Zahl b zwischen diesen Gränzen fa und ha enthalten seyn muß, ferner muß dieselbe auch nicht einem der beyden Gränzen gar zu nahe kommen, weil sonst die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In dem vorigen Exempel, wo $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$ und $h = \frac{1}{2}$ waren die Gränzen 350 und 50, wollte man nun setzen $b = 51$ anstatt 100, so wären die Gleichungen $x + y + z = 100$, und $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51$ und hier mit 6 multiplicirt $21x + 8y + 3z = 306$; man nehme die erste dreymal, so wird $3x + 3y + 3z = 300$, so von jener abgezogen läßt $18x + 5y = 6$, welche gleich offen-

offenbar unmöglich ist, weil x und y ganze Zahlen seyn müssen.

28.

Diese Regel kommt auch den Münzmeistern und Goldschmieden wohl zu statten, wenn sie aus drey oder mehreren Sorten von Silber eine Masse von einem gegebenen Gehalt zusammen schmelzen wollen; wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

III. Frage: Ein Münzmeister hat dreyerley Silber, das erste ist 14 löthig, das andere 11 löthig, das dritte 9 löthig. Nun soll er eine Masse 30 Mark schwer machen, welche 12 löthig seyn soll, wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Mark, von der zweyten y M. und von der dritten z M. so muß seyn $x+y+z=30$, welches die erste Gleichung ist:

Da ferner ein Mark von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Mark enthalten 14x Loth Silber; eben so werden die y Mark von der zweyten Sorte enthalten 11y Loth; und die z Mark von der dritten Sorte werden enthalten 9z Loth Silber; daher die ganze Masse an Silber enthalten wird $14x + 11y + 9z$ Loth. Weil nun dieselbe 30 Mark wiegt, wovon ein Mark 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber darinnen seyn, nämlich 360 Loth; woraus diese zweyte Gleichung entspringt $14x + 11y + 9z = 360$, hiervon subtrahire man die erste 9 mal genommen, nämlich $9x + 9y + 9z = 270$, so bleibt übrig $5x + 2y = 90$, woraus x und y bestimmt werden soll, und zwar in ganzen Zahlen, alsdenn aber wird $z = 30 - x - y$; aus jener Gleichung bekommt man $2y = 90 - 5x$ und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es sey demnach $x = 2u$, so wird $y = 45 - 5u$

und

und $z = 3u - 15$, also muß u größer als 4 und gleichwohl kleiner als 10 seyn, woraus folgende Auflösungen gezogen werden.

u = 5,	6,	7,	8,	9,
x = 10,	12,	14,	16,	18,
y = 20,	15,	10,	5,	0,
z = 0,	3,	6,	9,	12,

29.

Bisweilen kommen mehr als drey unbekannte Zahlen vor, wo die Auflösung auf eben diese Art geschehen kann, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

IV. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh um 100 Rthl., 1 Ochsen für 10 Rthl., 1 Kuh für 5 Rthl., 1 Kalb für 2 Rthl., 1 Schaf für $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schafe sind es gewesen?

Die Zahl der Ochsen sey = p, der Kühe = q, der Kälber = r und der Schafe = s, so ist die erste Gleichung: $p+q+r+s=100$, die zweyte Gleichung aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, welche um die Brüche wegzubringen mit 2 multiplicirt giebt $20p + 10q + 4r + s = 200$, hievon subtrahire man die erste Gleichung so hat man, $19p + 9q + 3r = 100$; hieraus bekommen wir $3r = 100 - 19p - 9q$ und $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, oder $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$, daher muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar seyn. Man setze demnach

$p - 1 = 3t$ so wird:

$p = 3t + 1$
$q = q$
$r = 27 - 19t - 3q$
$s = 72 + 2q + 16t$

also muß $19t + 3q$ kleiner seyn als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wenn nur diese Bedingung beobachtet wird, daß $19t + 3q$ nicht größer werde als 27; daher wir folgende Fälle zu erwegen haben.

I. wenn $t = 0$,	II. wenn $t = 1$,	t, kann
so wird $p = 1$,	so wird $p = 4$	nicht 2 gesetzt werden weil sonsten r, negativ würde.
$q = q$,	$q = q$	
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$	
$s = 72 + 2q$	$s = 88 + 2q$	

Im ersten Fall muß q nicht größer seyn als 9 und im zweyten Fall muß q nicht größer seyn als 2. Aus beyden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Falle erhalten wir diese 10 Auflösungen

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Fall aber diese 3 Auflösungen:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieses sind nun in allem 13 Auflösungen; wenn man aber 0 nicht wollte gelten lassen, so wären es nur 10 Auflösungen.

30.

Die Art der Auflösung bleibt einerley, wenn auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

V. Frage: Man suche drey ganze Zahlen, wenn die erste mit 3, die andere mit 5, und die dritte mit 7 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 560; wenn aber die erste mit 9 die andere mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 2920?

Es sey die erste Zahl $= x$ die zweyte $= y$, die dritte $= z$, so hat man diese zwey Gleichungen

I.) $3x + 5y + 7z = 560$, II.) $9x + 25y + 49z = 2920$

von der zweyten subtrahirt man die erste dreymal genommen nämlich $9x + 15y + 21z = 1680$, so bleiben übrig $10y + 28z = 1240$, oder durch 2 dividirt

$5y + 14z = 620$, daraus wird $y = 124 - \frac{14z}{5}$; also

muß sich z durch 5 theilen lassen; daher setze man $z = 5u$, so wird $y = 124 - 14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für z und y geschrieben, geben $3x - 35u + 620 = 560$, oder $3x = 35u - 60$ und $x = \frac{35u}{3} - 20$;

deswegen setze man $u = 3t$, so bekommen wir endlich diese Auflösung: $x = 35t - 20$, $y = 124 - 42t$, und $z = 15t$, wo man für t eine beliebige ganze Zahl setzen kann, doch so daß t größer sey als o und doch kleiner als 3, woraus man 2 Auflösungen erhält:

I.) wenn $t = 1$ so wird $x = 15$, $y = 82$, $z = 15$

II.) wenn $t = 2$ wird $x = 50$, $y = 40$, $z = 30$

Capitel 3.

Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkommt.

31.

Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, wo zwey unbekannte Zahlen gesucht werden, und die eine nicht wie bisher allein steht, sondern entweder mit der andern multiplicirt oder in einer höhern Potestät vorkommt, wenn nur von der andern bloß die erste Potestät vorhanden ist. Auf eine allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form:

$$a + bx + cy + dxx + exy + fx^3 + gxxy + hx^4 + kx^2y + \text{&c.} = 0$$

in welcher nur y vorkommt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann, die Bestimmung muß aber also geschehen, daß für x und y ganze Zahlen heraus kommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten und von den leichtern den Anfang machen.

32.

I.) Frage: Man suche zwey Zahlen, wenn ihre Summe zu ihrem Product addirt wird, das 79 heraus kommen?

Es seyn die zwey verlangten Zahlen x und y, so muß seyn $xy + x + y = 79$, woraus wir bekommen

$xy + y = 79 - x$ und $y = \frac{79-x}{x+1} = -1 + \frac{80}{x+1}$, woraus erhellet daß $x + 1$ ein Theiler seyn muß von 80:

da

da nun 80 viele Theiler hat so findet man aus einem jeden einen Werth für x; wie aus folgenden zu sehen:

die Theiler sind	1,	2,	4,	5,	8,	10,	16,	20,	40,	80,
daher wird x =	0,	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und y =	79,	39	19	15	9	7	4	3	1	0

weil nun hier die letztern Auflösungen mit den erstern überein kommen, so hat man in allem folgende fünf Auflösungen:

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33.

Solcher gestalt kann auch diese allgemeine Gleichung aufgelöst werden $xy + ax + by = c$ woraus kommt $xy + by = c - ax$ und also $y = \frac{c-ax}{x+b}$ oder $y = -a + \frac{ab+c}{x+b}$; daher muß $x + b$ ein Theiler seyn der bekannten Zahl $ab + c$ und also kann aus einem jeden Theiler derselben ein Werth für x gefunden werden. Man setze daher es sey $ab + c = fg$ also daß $y = -a + \frac{fg}{x+b}$. Nun nehme man $x + b = f$ oder $x = f - b$, so wird $y = -a + g$ oder $y = g - a$; derohalben auf so viel verschiedene Arten sich die Zahl $ab + c$ durch zwey Factores, als fg, vorstellen läßt, so erhält man daher nicht nur eine, sondern zwey Auflösungen: die erste ist nämlich $x = f - b$ und $y = g - a$, die andere aber kommt gleicher Gestalt heraus, wenn man $x + b = g$ setzt, da wird $x = g - b$ und $y = f - a$.

Sollte daher diese Gleichung vorgegeben seyn $xy+2x+3y=42$ so wäre $a=2$, $b=3$, und $c=42$ folglich $y=-2+\frac{48}{x+3}$. Nun kann die Zahl 48 auf vielerley Art durch 2 Factores als fg vorgestellt werden, da denn immer seyn wird $x=f-3$ und $y=g-2$, oder auch $x=g-3$ und $y=f-2$. Dergleichen Factores sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factores	1. 48		2. 24		3. 16		4. 12		6. 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	−2	46	−1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	−1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

Noch allgemeiner kann die Gleichung also vorgestellet werden: $mxy=ax+by+c$, wo a, b, c, und m gegebene Zahlen sind, für x und y aber ganze Zahlen verlangt werden.

Man suche daher y so bekommt man $y=\frac{ax+c}{mx-b}$, damit hier x aus dem Zähler weg gebracht werden könne, so multiplicirt man beyderseits mit m, so hat man $my=\frac{max+mc}{mx-b}=a+\frac{mc+ab}{mx-b}$. Der Zähler dieses Bruchs ist nun eine bekannte Zahl, wovon der Nenner ein Theiler seyn muß, man stelle daher den Zähler durch zwey Factores als fg vor, welches öfters auf vielerley Art geschehen kann, und sehe ob sich einer davon mit $mx-b$ vergleichen lasse, also daß $mx-b=f$: hierzu wird aber erfordert, weil $x=\frac{f+b}{m}$,

daß

daß f + b sich durch m theilen lasse, daher hier nur solche Factores von mc + ab gebraucht werden können, welche, wenn dazu b addirt wird, sich durch m theilen lassen, welches durch ein Exempel erläutert werden soll:

Es sey demnach $5xy = 2x + 3y + 18$. Hieraus bekommt man $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-}$, hier müssen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß wenn zu denselben 3 addirt wird, die Summe durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96 welche sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus erhellet daß nur diese, nämlich 2, 12, 32 gebraucht werden können.

Es sey demnach I.) $5x - 3 = 2$, so wird $5y = 50$
und daher $x = 1$, und $y = 10$

II.) $5x - 3 = 12$, so wird $5y = 10$
und daher $x = 3$, und $y = 2$

III.) $5x - 3 = 32$, so wird $5y = 5$
und daher $x = 7$, und $y = 1$

35.

Da hier in der allgemeinen Auflösung wird $my - a = \frac{mc+ab}{mx-b}$, so ist dienlich diese Anmerkung zu machen, daß wenn eine in dieser Form mc + ab enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in dieser Form mx − b enthalten ist, alsdenn der Quotient nothwendig diese Form my − a haben müsse, und daß alsdenn die Zahl mc + ab durch ein solches Product, (mx−b) (my − a) vorgestellt werden könne: Es sey z. E. m = 12, a = 5, b = 7 und c = 15; so bekommt man

$12y - 5 = \frac{215}{12x - 7}$; nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müssen, welche in der Form $12x - 7$ enthalten sind, oder wenn man 7 darzu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen lasse, von welchen nur 5 dieses leistet, also $12x - 7 = 5$ und $12y - 5 = 43$. Wie nun aus der ersten wird $x = 1$ so findet man auch aus der andern y in ganzen Zahlen, nämlich $y = 4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdienet deswegen wohl bemerket zu werden.

36.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von dieser Art betrachten $xy + xx = 2x + 3y + 29$. Hieraus findet man nun $y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3}$ oder $y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3}$; also muß $x - 3$ ein Theiler seyn von der Zahl 26, und alsdenn wird der Quotient $= y + x + 1$. Da nun die Theiler von 26 sind 1, 2, 13, 26 so erhalten wir diese Auflösungen:

I. $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, so wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$

II. $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, also $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$

III. $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, so wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$

welcher negative Werth wegzulassen ist, und deswegen auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden muß.

37.

Mehr Formeln von dieser Art wo nur die erste Potestät von y, noch höhere aber von x vorkommen,

sind

sind nicht nöthig allhier zu berechnen, weil dergleichen Fälle sich nur selten ereignen, und alsdenn auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden können. Wenn aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern Potestät ansteiget, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kommt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potestät befindlich ist, und alsdenn kommt es darauf an solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Und eben hierinn bestehet die größte Kunst der unbestimmten Analytic, wie dergleichen Irrationalformeln zur Rationalität gebracht werden sollen, wozu wir die Anleitung in den folgenden Capiteln geben wollen.

Capitel 4.

Von der Art diese irrationale Formeln $r(a+bx+cxx)$ rational zu machen.

38.

Hier ist also die Frage was für Werthe für x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a+bx+cxx$ ein wirkliches Quadrat werde, und also die Quadratwurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruhet hauptsächlich die Bestimmung der unbekannten Zahl x, wobey zum voraus zu bemerken, daß in vielen Fällen die Auflösung davon unmöglich werde:

wenn aber dieselbe möglich ist, so muß man sich zum wenigsten anfänglich in Bestimmung des Buchstabens x bloß mit rational Werthen begnügen, und nicht fordern, daß dieselben so gar ganze Zahlen seyn sollen, als welches eine ganz besondere Untersuchung erfordert.

39.

Wir nehmen hier an, daß diese Formel nur bis zur zweyten Potestät von x steige, indem höhere Potestäten besondere Methoden erfordern, wovon hernach gehandelt werden soll.

Sollte hier nicht einmal die zweyte Potestät vorkommen, und $c = 0$ seyn, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: denn wenn diese Formel $\int (a + bx)$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a + bx$ ein Quadrat würde, so dürfte man nur setzen

$a + bx = yy$, woraus man so gleich erhielte $x = \frac{yy - a}{b}$;

und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a + bx$ ein Quadrat und folglich $\int (a + bx)$ rational heraus käme.

40.

Wir wollen demnach bey dieser Formel anfangen $\int (1 + xx)$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß wenn zu ihrem Quadrat xx noch 1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, indem keine ganze Quadratzahl nur um 1 größer ist als die vorhergehende, daher man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

41.

Weil $1 + xx$ ein Quadrat seyn soll, und man setzen wollte $1 + xx = yy$, so würde $xx = yy - 1$ und $x = \sqrt{(yy - 1)}$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre Quadrate weniger 1 wiederum Quadrate würden, welche Frage eben so schwer ist als die vorige und würde also hierdurch nichts gewonnen.

Daß es aber wirklich solche Brüche gebe, welche für x gesetzt $1 + xx$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I. wenn $x = \frac{3}{4}$ so wird $1 + xx = \frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{(1 + xx)} = \frac{5}{4}$.

II. Eben dieses geschieht wenn $x = \frac{4}{3}$ wo $\sqrt{(1 + xx)} = \frac{5}{3}$ heraus kommt.

III. Hernach wenn man setzt $x = \frac{5}{12}$ so erhält man $1 + xx = \frac{169}{144}$, wovon die Quadratwurzel ist $\frac{13}{12}$.

Wie nunmehr dergleichen Zahlen und sogar alle mögliche gefunden werden sollen, muß hier gezeigt werden.

42.

Solches kann auf zweyerley Art geschehen. Nach der ersten Art setze man $\sqrt{(1 + xx)} = x + p$ so wird $1 + xx = xx + 2px + pp$, wo sich das Quadrat xx aufhebt und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Denn in der gefundenen Gleichung subtrahirt man beyderseits xx so wird $2px + pp = 1$, woraus gefunden wird $x = \frac{1 - pp}{2p}$, wo man für p eine jede Zahl annehmen kann, und auch sogar dafür Brüche gesetzt werden können.

Man setze daher $p = \frac{m}{n}$, so wird $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$: diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit nn, so bekommt man $x = \frac{nn - mm}{2mn}$.

43.

Damit also $1 + xx$ ein Quadrat werde, so kann man für m und n nach Belieben alle mögliche ganze Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viel Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x = \frac{nn - mm}{2mn}$, so wird

$$1 + xx = 1 + \frac{n^4 - 2nnmm + m^4}{4mmnn} \text{ oder } 1 + xx = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{4mmnn}$$

welcher Bruch wirklich ein Quadrat ist, und daraus gefunden wird $r(1 + xx) = \frac{nn + mm}{2mn}$.

Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemerket werden,

wenn $n = 2$,	3,	3,	4,	4,	5,	5,	5,	5,
und $m = 1$,	1,	2,	1,	3,	1,	2,	3,	4,
so wird $x = \frac{3}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{12}$,	$\frac{15}{8}$,	$\frac{7}{24}$,	$\frac{12}{5}$,	$\frac{21}{20}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{9}{40}$,

44.

Hieraus folget auf eine allgemeine Art, daß $1 + \frac{(nn - mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire man diese Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird $(2mn)^2 + (nn - mm)^2 = (nn + mm)^2$; wir haben also auf

eine

eine allgemeine Art zwey Quadraten, deren Summe wieder ein Quadrat ist, hierdurch wird nun diese Frage aufgelöst.

Zwey Quadratzahlen zu finden; deren Summe wieder eine Quadratzahl sey?

Also soll $pp+qq=rr$ seyn: zu diesem Ende darf man nur setzen $p=2mn$ und $q=nn-mm$, so wird $r=nn+mm$; da hernach ferner $(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2$, so können wir auch diese Frage auflösen.

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadratzahl sey? also, daß $pp-qq=rr$; denn da darf man nur setzen $p=nn+mm$ und $q=2mn$, so wird $r=nn-mm$.

Oder man kann auch setzen $p=nn+mm$ und $q=nn-mm$, so wird alsdenn $r=2mn$.

45.

Wir haben aber zweyerley Arten versprochen, um die Formel $1+xx$ zu einem Quadrat zu machen; die andere Art verhält sich nun folgender Gestalt:

Man setze $r(1+xx)=1+\frac{mx}{n}$; daher bekommt man $1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$; subtrahirt man hier beyderseits 1, so wird $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$, welche Gleichung sich durch x theilen läßt, und folglich giebt $x=\frac{2m}{n}+\frac{mmx}{nn}$, oder mit nn multiplicirt, $nnx=2mn+mmx$, woraus gefunden wird $x=\frac{2mn}{nn-mm}$: denn

setzt

setzt man diesen Werth für x, so wird $1 + xx = 1 + \frac{4mmnn}{n^4 - 2mmnn + m^4}$ oder $= \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{n^4 - 2mmnn + m^4}$, welcher Bruch das Quadrat ist von $\frac{nn+mm}{nn-mm}$. Da man nun daher diese Gleichung bekommt $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2}$ so fließt daraus, wie oben $(nn - mm)^2 + (2mn)^2 = (nn + mm)^2$, welches die vorigen zwey Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

46.

Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand, um die allgemeine Formel $a + bx + cxx$ zu einem Quadrat zu machen. Die erstere gehet auf alle Fälle, wo c ein Quadrat ist; der andere aber, wo a ein Quadrat ist; welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

I.) Es sey demnach erstlich c eine Quadratzahl oder die gegebene Formel sey $a + bx + ffxx$, welche ein Quadrat werden soll, zu diesem Ende setze man $\sqrt{(a + bx + ffxx)} = fx + \frac{m}{n}$, so wird $a + bx + ffxx = ffxx + \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, wo sich die xx beyderseits aufheben, also, daß $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, welche mit nn multiplicirt, $nna + nnbx = 2mnfx + mm$ giebt; woraus gefunden wird $x = \frac{mm - nna}{nnb - 2mnf}$, wird nun dieser Werth für x geschrieben,

ben, so wird $\sqrt{(a+bx+ffxx)} = \frac{mmf-nnaf}{nnb-mnf} + \frac{m}{n}$

$= \frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}$.

47.

Da für x ein Bruch gefunden worden, so setze man sogleich $x = \frac{p}{q}$, also, daß $p = mm - nna$, und $q = nnb - 2mnf$, und alsdenn wird die Formel $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffpp}{qq}$ ein Quadrat; folglich bleibt dieselbe ein Quadrat, wenn sie mit dem Quadrat qq multiplicirt wird, daher auch diese Formel $aqq + bpq + ffpp$ ein Quadrat wird, wenn man setzt $p = mm - nna$ und $q = nnb - 2mnf$, woraus unendlich viel Auflösungen in ganzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

48.

II. Der zweyte Fall findet statt, wenn der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sey demnach diese Formel gegeben $ff + bx + cxx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Zu diesem Ende setze man $\sqrt{(ff+bx+cxx)} = f + \frac{mx}{n}$, so wird $ff+bx+cxx$

$= ff + \frac{2mfx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$, wo sich die ff aufheben, und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen lassen, also,

daß $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$, oder $nnb + nncx = 2mnf + mmx$, oder $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, und folglich

lich $x = \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm}$; setzt man nun diesen Werth für x, so wird $r(ff + bx + cxx) = f + \frac{2mmf - mnb}{nnc - mm}$ $= \frac{nncf + mmf - mnb}{nnc - mm}$: setzt man hier $x = \frac{p}{q}$, so kann, wie oben, folgende Formel zu einem Quadrat gemacht werden, $ffqq + bpq + cpp$, als welches geschiehet, wenn man setzt $p = 2mnf - nnb$ und $q = nnc - mm$.

49.

Hier ist besonders der Fall merkwürdig, wenn $a = o$, oder wenn diese Formel $bx + cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden soll; denn da darf man nur setzen $r(bx + cxx) = \frac{mx}{n}$, so wird $bx + cxx = \frac{mmxx}{nn}$, wo durch x dividirt und mit nn multiplicirt heraus kommt, $bnn + cnnx = mmx$, folglich $x = \frac{nnb}{mm - cnn}$.

Man suche z. E. alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind, so muß $\frac{xx+x}{2}$, und also auch $2xx + 2x$ ein Quadrat seyn. Dasselbe sey nun $\frac{mmxx}{nn}$, so wird $2nnx + 2nn = mmx$ und $x = \frac{2nn}{mm - 2nn}$; wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, alsdenn aber wird mehrentheils für x ein Bruch gefunden; doch können auch ganze Zahlen heraus kommen, als wenn man setzt $m = 3$ und $n = 2$, so bekommt man $x = 8$, wovon das Dreyeck ist 36, welches auch ein Quadrat ist.

Man

Man kann auch setzen $m = 7$ und $n = 5$, so wird $x = -50$, wovon das Dreyeck ist 1225, welches zugleich das Dreyeck ist von $+49$, und auch das Quadrat von 35; dieses wäre auch heraus gekommen, wenn man gesetzt hätte $n = 7$, und $m = 10$, denn da wird $x = 49$.

Eben so kann man setzen $m = 17$ und $n = 12$, da wird $x = 288$, wovon das Dreyeck ist $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288.289}{2}$ $= 144.289$, welches eine Quadratzahl ist, deren Wurzel $= 12.17 = 204$.

50.

Bey diesem letzten Fall ist zu erwägen, daß die Formel $bx + cxx$ aus diesem Grund zum Quadrat gemacht worden, weil dieselbe einen Factor hatte, nämlich x, welches uns auf neue Fälle führet, in welchen auch die Formel $a + bx + cxx$ ein Quadrat werden kann, wenn weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle finden statt, wenn sich $a + bx + cxx$ in zwey Factores vertheilen läßt, welches geschiehet, wenn $bb - 4ac$ ein Quadrat ist. Um dieses zu zeigen, so ist zu merken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a + bx + cxx = 0$, so wird $cxx = -bx - a$ und $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$

woraus gefunden wird $x = -\frac{b}{2c} \pm r\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)$, oder

$x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{r(bb-4ac)}{2c}$, woraus erhellet, daß, wenn $bb - 4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzel rational angegeben werden können;

Es

Es sey demnach $bb - 4ac = dd$, so sind die Wurzeln $\frac{-b \pm d}{2c}$, oder es ist $x = \frac{-b \pm d}{2c}$, also werden von der Formel $a + bx + cxx$ die Divisores seyn $x + \frac{b-d}{2c}$ und $x + \frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt, dieselbe Formel nur durch c dividirt, hervor bringen, man findet nämlich $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} + \frac{dd}{4cc}$, da nun $dd = bb - 4ac$, so hat man $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$, welche mit c multiplicirt, giebt $cxx + bx + a$. Man darf also nur den einen Factor mit c multipliciren, so wird unsere Formel diesem Product gleich seyn:

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right)$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer statt findet, so oft $bb + 4ac$ ein Quadrat ist.

51.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unsere Formel $a + bx + cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden kann; welchen wir also zu den obigen beyden hinzu fügen wollen.

III. Dieser Fall ereignet sich nun, wenn unsere Formel durch ein solches Product vorgestellet werden kann $(f + gx).(h + kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, so setze man die Wurzel davon:

$r(f + gx).(h + kx) = \frac{m.(f+gx)}{n}$, so bekommt man $(f + gx)\ (h + kx) = \frac{mm.(f+gx)^2}{nn}$, welche Gleichung

chung durch $f+gx$ dividirt, giebt $h+kx=\frac{mm.(f+gx)}{nn}$, das ist, $hnn+knnx=fmm+gmmx$, woraus gefunden wird $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

52.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Frage vorgegeben:

I. Frage: Man suche die Zahlen x, daß, wenn man von ihrem doppelten Quadrat 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sey?

Da nun seyn muß $2xx-2$ ein Quadrat, so ist zu erwägen, daß sich diese Formel durch folgende Factores vorstellen läßt $2.(x+1)(x-1)$: man setze also die Wurzel davon $\frac{m.(x+1)}{n}$, so wird $2.(x+1)(x-1)=\frac{mm.(x+1)^2}{nn}$; man dividire durch $x+1$, und multiplicire mit nn, so bekommt man $2nnx-2nn=mmx+mm$ und daher $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mm}$. Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so wird $x=3$, und $2xx-2=16=4^2$.

Nimmt man $m=3$ und $n=2$, so wird $x=-17$: da aber nur das Quadrat von x vorkommt, so ist es gleich viel, ob man nimmt $x=-17$ oder $x=+17$, aus beyden wird $2xx-2=576=24^2$.

53.

II. Frage: Es sey diese Formel gegeben $6+13x+6xx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Hier ist nun a=6, b=13 und c=6, wo also weder a noch c ein Quadrat ist. Man sehe also, ob bb−4ac ein Quadrat werde; da nun kommt 25, so weiß man, daß diese Formel durch zwey Factores vorgestellt werden kann, welche sind (2+3x).(3+2x); davon sey nun die Wurzel $\frac{m(2+3x)}{n}$, so bekommt man (2+3x).

$(3+2x) = \frac{mm(2+3x)^2}{nn}$, daraus wird 3nn + 2nnx

$= 2mm + 3mmx$, und daher wird $x = \frac{2mm - 3nn}{2nn - 3mm}$

$= \frac{3nn - 2mm}{3mm - 2nn}$. Damit nun der Zähler positiv werde, so muß 3nn größer seyn als 2mm, und also 2mm kleiner als 3nn; folglich muß $\frac{mm}{nn}$ kleiner seyn als $\frac{3}{2}$, damit der Zähler positiv werde. Damit aber der Nenner positiv werde, so muß 3mm größer seyn als 2nn, und also $\frac{mm}{nn}$ größer seyn als $\frac{2}{3}$. Um daher für x positive Zahlen zu finden, so müssen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{mm}{nn}$ kleiner sey als $\frac{3}{2}$ und doch größer als $\frac{2}{3}$.

Setzt man nun m=6 und n=5, so wird $\frac{mm}{nn} = \frac{36}{25}$, welches kleiner ist als $\frac{3}{2}$, und offenbar größer als $\frac{2}{3}$; daher bekommt man $x = \frac{3}{5}\frac{}{8}$.

54.

IV. Dieser dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Platz findet, wenn die Formel a + bx + cxx dergestalt in zwey Theile zertheilt werden kann, daß

daß der erste ein Quadrat sey, der andere aber sich in zwey Factores auflösen lasse, also, daß eine solche Form heraus komme $pp+qr$, wo die Buchstaben p, q und r Formeln von dieser Art $f+gx$ bedeuten. Denn da darf man nur setzen $r(pp+qr)=p+\frac{mq}{n}$, so wird $pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn}$, wo sich die pp aufheben, und die übrigen Glieder durch q theilen lassen, also, daß $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$ oder $nnr=2mnp+mmq$, woraus sich leicht bestimmen läßt, und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrat gemacht werden kann, welchen wir nun durch einige Exempel erläutern wollen.

55.

III. Frage: Man suche solche Zahlen x, daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 größer werde als ein anderes Quadrat? oder wenn man davon 1 subtrahirt, ein Quadrat übrig bleibe? wie bey der Zahl 5 geschieht, deren Quadrat 25 doppelt genommen ist 50, wovon 1 subtrahirt, das Quadrat 49 übrig bleibt.

Also muß $2xx-1$ ein Quadrat seyn, wo nach unserer Formel $a=-1$, $b=0$, und $c=2$, und also weder a noch c ein Quadrat ist, auch läßt sich dieselbe nicht in zwey Factores auflösen, weil $bb-4ac=8$ kein Quadrat ist, und daher keiner von den drey ersten Fällen statt findet.

Nach dem vierten Fall aber kann diese Formel also vorgestellt werden $xx+(xx-1)=xx+(x-1)(x+1)$. Hiervon werde nun die Wurzel gesetzt $x+\frac{m(x+1)}{n}$,

daher wird $xx + (x+1).(x-1) = xx + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$, wo sich die xx aufheben, und die übrigen Glieder durch $x+1$ theilen lassen, da denn kommt $nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$ und $x = \frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; und weil in unserer Formel $2xx-1$ nur das Quadrat xx vorkommt, so ist es gleich viel, ob die Werthe von x positiv oder negativ heraus kommen. Man kann auch sogleich $-m$ anstatt $+m$ schreiben, damit man bekomme $x = \frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$. Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so hat man $x=1$ und $2xx-1=1$. Es sey ferner $m=1$ und $n=2$, so wird $x=\frac{5}{7}$ und $2xx-1=\frac{1}{49}$. Setzt man aber $m=1$ und $n=-2$, so wird $x=-5$, oder $x=+5$ und $2xx-1=49$.

56.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wenn dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat mache? dergleichen ist 7, wovon das Quadrat doppelt genommen ist 98, und 2 addirt, kommt das Quadrat 100?

Es muß also diese Formel $2xx+2$ ein Quadrat seyn, wo $a=2$, $b=0$ und $c=2$, also wieder weder a noch c ein Quadrat ist, auch ist $bb-4ac$ oder -16 kein Quadrat, und kann die dritte Regel hier nicht statt finden.

Nach der vierten Regel aber läßt sich unsere Formel also vorstellen:

Man setze den ersten Theil $=4$, so wird der andere seyn $2xx-2=2(x+1).(x-1)$, und daher unsere

sere Formel $4 + 2(x+1).(x-1)$. Davon sey die Wurzel $2 + \frac{m.(x+1)}{n}$, woher diese Gleichung entspringt,

$$4+2(x+1).(x-1) = 4 + \frac{4m(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn},$$

wo sich die 4 aufheben, die übrigen Glieder sich aber durch $x+1$ theilen lassen, also, daß $2nnx - 2nn = 4mn + mmx + mm$, und daher $x = \frac{4mn + mm + 2nn}{2nn - mm}$.

Setzt man $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = 7$, und $2xx + 2 = 100$.

Nimmt man $m = 0$ und $n = 1$, so wird $x = 1$, und $2xx + 2 = 4$.

57.

Oefters geschiehet es auch, daß, wenn weder die erste, noch zweyte, noch dritte Regel Platz findet, man nicht finden kann, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey solche Theile zergliedert werden könne, dergleichen erfordert werden. Als wenn diese Formel vorkäme $7 + 15x + 13xx$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, fällt aber nicht so leicht in die Augen. Denn der erste Theil ist $(1-x)^2$, oder $1-2x+xx$, und daher wird der andere seyn $6+17x+12xx$, welcher deswegen Factoren hat, weil $17^2 - 4.6.12 = 1$, und also ein Quadrat ist. Die zwey Factores davon sind auch wirklich $(2+3x).(3+4x)$; also, daß diese Formel seyn wird $(1-x)^2 + (2+3x)(3+4x)$, welche jetzo nach der vierten Regel aufgelöst werden kann.

Es ist aber nicht wohl zu fordern, daß jemand diese Zergliederung errathen soll; Daher wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen wollen, um erstlich zu erkennen, ob es möglich sey, eine solche Formel aufzulösen?

weil es unendlich viel dergleichen giebt, deren Auflösungen schlechterdings unmöglich sind, wie z. E. bey dieser geschiehet 3xx + 2, welche nimmermehr zu einem Quadrat gemacht werden kann.

Findet sich aber eine Formel in einem einigen Fall möglich, so ist es leicht, alle Auflösungen derselben zu finden, welches wir noch allhier erörtern wollen.

58.

Der ganze Vortheil, welcher in solchen Fällen zu statten kommen kann, bestehet darinn, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen kann, in welchem eine solche Formel a + bx + cxx ein Quadrat wird? indem man für x einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen, ob in keinem Fall ein Quadrat heraus komme?

Um diese Arbeit zu erläutern, wenn etwann eine gebrochene Zahl für x gesetzt, dieses leisten sollte, kann man sogleich für x einen Bruch als $\frac{t}{u}$ schreiben, woraus diese Formel erwächst $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, welche, wenn sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat uu multiplicirt, ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig zu probiren, ob man für t und u solche Werthe in ganzen Zahlen errathen kann, daß diese Formel auu+btu + ctt ein Quadrat werde? denn alsdenn, wenn man setzt $x = \frac{t}{u}$, so wird auch diese Formel a+bx+cxx gewiß ein Quadrat seyn.

Kann man aber, aller Mühe ungeachtet, keinen solchen Fall finden, so hat man großen Grund zu vermuthen, daß es ganz und gar unmöglich sey, die Formel

mel zu einem Quadrat zu machen, als dergleichen es unendlich viele giebt.

59.

Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es ganz leicht, alle mögliche Fälle zu finden, darinn dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird; und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß. Um dieses zu zeigen, so wollen wir erstlich diese Formel betrachten $2+7xx$, wo $a=2$, $b=0$, und $c=7$: dieselbe wird nun offenbar ein Quadrat, wenn $x=1$; daher setze man $x=1+y$, so wird $xx=1+2y+yy$, und unsere Formel wird seyn $9+14y+7yy$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist: also setzen wir nach der zweyten Regel die Quadratwurzel davon $=3+\frac{my}{n}$, da bekommen wir diese Gleichung $9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmy}{nn}$, wo sich die 9 aufheben, die übrigen Glieder aber alle durch y theilen lassen; da bekommen wir $14nn+7nny=6mn+mmy$, und daher $y=\frac{6mn-14nn}{7nn-mm}$; daraus finden wir $x=\frac{6mn-7nn-mm}{7nn-mm}$, wo man für m und n alle beliebige Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{1}{3}$, oder auch, weil nur xx vorkommt, $x=+\frac{1}{3}$, daher wird $2+7xx=\frac{25}{9}$.

Man setze ferner $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-1$, oder $x=+1$.

Setzt man aber $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=17$; daraus wird $2+7xx=2025$, welches das Quadrat ist von 45.

Laßt uns auch setzen $m=8$ und $n=3$, so wird $x=-17$ wie zuvor.

Setzen wir aber $m=8$ und $n=-3$, so wird $x=271$, daraus wird $2+7xx=514089=717^2$.

60.

Wir wollen ferner diese Formel betrachten $5xx+3x+7$, welche ein Quadrat wird, wenn $x=-1$. Deswegen setze man $x=y-1$, so wird unsere Formel in diese verwandelt

$$\begin{array}{r} 5yy-10y+5 \\ +3y-3 \\ +7 \\ \hline 5yy-7y+9 \end{array}$$

davon setze man die Quadratwurzel $=3-\frac{my}{n}$, so wird

$$5yy-7y+9=9-\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn};$$ daher wir bekommen $5nny-7nn=-6mn+mmy$, und $y=\frac{7nn-6mn}{5nn-mm}$,

folglich $x=\frac{2nn-6mn+mm}{5nn-mm}$.

Es sey $m=2$ und $n=1$, so wird $x=-6$, und also $5xx+3x+7=169=13^2$.

Setzt man aber $m=-2$ und $n=1$, so wird $x=18$ und $5xx+3x+7=1681=41^2$.

61.

Laßt uns nun auch diese Formel betrachten $7xx+15x+13$, und sogleich setzen $x=\frac{t}{u}$, also, daß

diese

diese Formel $7tt + 15tu + 13uu$ ein Quadrat seyn soll. Nun probire man für t und u einige kleinere Zahlen, wie folget:

Es sey $t = 1$ und $u = 1$, so wird unsere Formel $= 35$
$t = 2$ und $u = 1$ $= 71$
$t = 2$ und $u = -1$ $= 11$
$t = 3$ und $u = 1$ $= 121$

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x = 3$ ein Genüge leistet, so setze man $x = y + 3$, und so wird unsere Formel $7yy + 42y + 63 + 15y + 45 + 13$ oder $7yy + 57y + 121$; davon setze man die Wurzel $= 11 + \frac{my}{n}$, so bekommt man $7yy + 57y + 121 = 121 + \frac{22my}{n} + \frac{mmyy}{nn}$, oder $7nny + 57nn = 22mn + mmy$, und daher $y = \frac{57nn - 22mn}{mm - 7nn}$ und $x = \frac{36nn - 22mn + 3mm}{mm - 7nn}$.

Man setze z. E. $m = 3$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{3}{2}$, und unsere Formel $7xx + 15x + 13 = \frac{25}{4} = (\frac{5}{2})^2$. Es sey ferner $m = 1$ und $n = 1$, so wird $x = -\frac{1}{6}$. Nimmt man $m = 3$ und $n = -1$, so wird $x = \frac{129}{2}$, und unsere Formel $7xx + 15x + 13 = \frac{120409}{4} = (\frac{347}{2})^2$.

62.

Bisweilen aber ist alle Mühe umsonst, einen Fall zu errathen, in welchem die vorgegebene Formel ein Quadrat wird, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx + 2$, oder wenn man für x schreibt $\frac{t}{u}$, dieser $3tt + 2uu$, welche, man mag auch für t und u Zahlen annehmen, die man will, niemals ein Quadrat wird. Dergleichen

chen Formeln, welche auf keinerley Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viel, und deswegen wird es der Mühe werth seyn, einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkennt werden kann, damit man öfters der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden, wo ein Quadrat heraus kommt, wozu das folgende Capitel bestimmt ist.

Capitel 5.

Von den Fällen, da die Formel $a+bx+cxx$ niemals ein Quadrat werden kann.

63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemerken, daß dieselbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied mangelt. Dieses geschiehet, wenn man setzt $x = \frac{y-b}{2c}$, dadurch bekommt unsere Formel diese Gestalt $a + \frac{by-bb}{2c} + \frac{yy-2by+bb}{4c}$, oder $\frac{4ac-bb+yy}{4c}$. Soll diese ein Quadrat werden, so setze man dasselbe $= \frac{zz}{4}$, so wird $4ac - bb + yy = czz$, folglich $yy = czz + bb - 4ac$. Wenn also unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch diese $czz + bb - 4ac$ ein Quadrat, und umgekehrt, wenn diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat; folglich, wenn man für $bb-4ac$ schreibt t, so kommt es darauf an, ob eine solche Formel

mel $czz + t$ ein Quadrat werden könne oder nicht? und da diese Formel nur aus zwey Gliedern besteht, so ist es ohnstreitig weit leichter die Möglichkeit oder Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beyden gegebenen Zahlen c und t geschehen muß.

64.

Wenn $t = o$ ist, so ist offenbar, daß die Formel czz nur alsdenn ein Quadrat werde, wenn die Zahl c ein Quadrat ist. Denn da ein Quadrat durch ein ander Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so kann czz kein Quadrat seyn, wofern nicht $\frac{czz}{zz}$, das ist c, ein Quadrat ist. Also wenn die Zahl c kein Quadrat ist, so kann auch die Formel czz auf keinerley Weise ein Quadrat werden: Ist aber c vor sich eine Quadratzahl, so ist auch czz ein Quadrat, man mag für z annehmen was man will.

65.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, so müssen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was oben von den verschiedenen Arten der Zahlen in Ansehung eines jeglichen Theilers angeführt worden.

Also in Ansehung des Theilers 3 sind die Zahlen von dreyerley Art: die erste begreift diejenigen Zahlen, welche sich durch 3 theilen lassen, und durch diese Formel $3n$ vorgestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt 1 übrig lassen, und in dieser Formel $3n + 1$ enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und durch diese Formel $3n + 2$ vorgestellt werden.

Da

Da nun alle Zahlen in einer von diesen 3 Formeln enthalten sind, so wollen wir die Quadraten davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel 3n enthalten, so ist ihr Quadrat 9nn, welches sich also nicht nur durch 3 sondern so gar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel 3n + 1 enthalten, so ist ihr Quadrat 9nn + 6n + 1, welches durch 3 dividirt giebt 3nn + 2n und 1 zum Rest läßt, und also auch zur zweyten Art 3n + 1 gehöret.

Ist endlich die Zahl in dieser Formel 3n + 2 enthalten, so ist ihr Quadrat 9nn + 12n + 4, welches durch 3 dividirt, giebt 3nn + 4n + 1, und 1 im Rest läßt, und also auch zu der zweyten Art 3n + 1 gehöret: daher ist klar, daß alle Quadratzahlen in Ansehung des Theilers 3, nur von zweyerley Arten sind. Denn entweder lassen sich dieselben durch 3 theilen, und alsdenn müssen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen lassen; oder wenn sie sich nicht durch 3 theilen lassen, so bleibt allezeit nur 1 im Rest, niemals aber 2. Daher keine Zahl, die in der Form 3n + 2 enthalten ist, ein Quadrat seyn kann.

66.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel 3xx + 2 niemals ein Quadrat werden kann, man mag für x eine ganze Zahl oder einen Bruch setzen. Denn wenn x eine ganze Zahl ist, und man theilt diese Formel 3xx + 2 durch 3, so bleiben 2 übrig, daher diese Formel kein Quadrat seyn kann. Wenn aber x ein Bruch ist, so setze man $x = \frac{t}{u}$, von welchem Bruch wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form gebracht worden, und also t und

u kei-

u keinen gemeinen Theiler haben außer 1. Sollte nun $\frac{3tt}{uu} + 2$ ein Quadrat seyn, so müßte dieselbe auch mit uu multiplicirt, das ist diese 3tt + 2uu ein Quadrat seyn, dieses aber kann ebenfalls nicht geschehen. Denn entweder läßt sich die Zahl u durch 3 theilen oder nicht: läßt sie sich theilen, so läßt sich t nicht theilen, weil sonst t und u einen gemeinen Theiler hätten.

Man setze daher u = 3f, so wird unsere Formel 3tt + 18ff, welche durch 3 getheilt giebt tt + 6ff, so sich nicht weiter durch 3 theilen läßt, wie zu einem Quadrat erfordert wird, weil sich zwar 6ff theilen läßt, tt aber durch 3 dividirt 1 übrig läßt.

Läßt sich aber u nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kommt es mit dem Reste blos auf das zweyte Glied 2uu an. Nun aber uu durch 3 dividirt 1 im Rest hat, oder eine Zahl ist von dieser Art 3n + 1: so wird 2uu eine Zahl von dieser Art 6n + 2 seyn, und also durch 3 dividirt 2 übrig lassen: daher unsere Formel 3tt + 2uu durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadratzahl seyn kann.

67.

Eben so kann man beweisen, daß auch diese Formel 3tt + 5 uu niemals ein Quadrat seyn kann, und so gar auch keine von diesen: 3tt + 8uu, 3tt + 11uu 3tt + 14uu ꝛc. wo die Zahlen 3, 8, 11, 14 ꝛc. durch 3 dividirt 2 übrig lassen. Denn wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man setzte u = 3s, so würde die Formel durch 3 nicht aber durch 9 theilbar seyn. Wäre u nicht durch 3 theilbar und also uu eine Zahl von dieser Art 3n + 1, so wäre zwar das erste Glied 3tt durch 3 theilbar, das andere aber 5uu von dieser Form 15n + 5, oder 8uu von dieser Form 24n + 8,

oder 11 uu von dieser 33n + 11 ꝛc. würde durch 3 dividirt 2 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn können.

68.

Dieses gilt also auch von dieser allgemeinen Formel $3tt + (3n + 2).uu$, welche nimmermehr ein Quadrat werden kann, und auch nicht wenn für n negative Zahlen gesetzt würden. Also wenn $n = -1$, so ist es unmöglich, diese Formel $3tt - uu$ zu einem Quadrat zu machen. Denn wenn u durch 3 theilbar ist, so ist die Sache offenbar, wäre aber u nicht theilbar durch 3, so würde uu eine Zahl von dieser Art $3n+1$, und also unsere Formel seyn $3tt-3n-1$, welche durch 3 dividirt übrig läßt -1, oder um 3 mehr, $+2$ übrig läßt. Man setze überhaupt $n = -m$, so wird unsere Formel $3tt - (3m - 2)uu$, welche auch nimmermehr ein Quadrat werden kann.

69.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführet; wir wollen daher auch 4 als einen Theiler betrachten, da denn alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln:

I. $4n$, II. $4n + 1$, III. $4n + 2$, IV. $4n + 3$,

enthalten sind. Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat $16nn$ und läßt sich also durch 16 theilen. Ists eine Zahl von der zweyten Art $4n + 1$, so ist ihr Quadrat $16nn + 8n + 1$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt, und gehört also zu dieser Formel $8n + 1$.

Ists eine Zahl von der dritten Art $4n + 2$ so ist ihr Quadrat $16\,nn + 16\,n + 4$, welche durch 16 dividirt 4 übrig läßt, und also in dieser Form $16\,n + 4$ enthalten ist. Ists endlich eine Zahl von der vierten

Art

Art $4n + 3$, so ist ihr Quadrat $16nn + 24n + 9$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt.

70.

Hieraus lernen wir folgendes, erstlich, daß alle gerade Quadratzahlen in dieser Form $16n$ oder in dieser $16n + 4$ enthalten sind; folglich alle übrige gerade Formeln, nämlich $16n + 2$; $16n + 6$; $16n + 8$; $16n + 10$; $16n + 12$; $16n + 14$, können niemals Quadratzahlen seyn.

Hernach von den ungeraden Quadraten ersehen wir, daß alle in dieser einzigen Formel $8n + 1$ enthalten sind, oder durch 8 dividirt 1 im Rest lassen. Daher alle übrige ungerade Zahlen, welche in einer von dieser Formel $8n + 3$; $8n + 5$; $8n + 7$, enthalten sind, können niemals Quadrate werden.

71.

Aus diesem Grunde können wir auch wiederum zeigen, daß diese Formel $3tt + 2uu$ kein Quadrat seyn kann. Denn entweder sind beyde Zahlen t und u ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ist ungerade, weil beyde zugleich nicht gerade seyn können, indem sonst 2 ihr gemeiner Theiler seyn würde. Wären beyde ungerade, und folglich so wohl tt als uu in dieser Form $8n + 1$ enthalten, so würde das erste Glied $3tt$ durch 8 dividirt 3 übrig lassen, das andere Glied aber 2 übrig lassen, beyde zusammen aber würden 5 übrig lassen, und also kein Quadrat seyn. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, so würde sich das erste Glied $3tt$ durch 4 theilen lassen, das andere aber $2uu$ würde durch 4 dividirt 2 übrig lassen, also beyde zusammen würden 2 übrig lassen und also kein Quadrat seyn. Wäre aber endlich u gerade nämlich $u = 2s$,

aber

aber t ungerade und folglich $tt = 8n + 1$, so würde unsere Formel seyn $24n + 3 + 8ss$, welche durch 8 dividirt 3 übrig läßt, und also kein Quadrat seyn kann.

Eben dieser Beweis läßt sich auch auf diese Formel ausdehnen $3tt + (8n + 2)uu$; imgleichen auch auf diese $(8m + 3)tt + 2uu$, und auch so gar auf diese $(8m + 3)tt + (8n + 2)uu$, wo für m und n alle ganze Zahlen sowohl positive als negative genommen werden können.

72.

Wir gehen solcher Gestalt weiter zum Theiler 5, in Ansehung dessen alle Zahlen in einer von diesen fünf Formeln:

I. $5n$, II. $5n + 1$, III. $5n + 2$, IV. $5n + 3$, V. $5n + 4$, enthalten sind. Ist nun eine Zahl von der ersten Art, so ist ihr Quadrat $25nn$, welches nicht nur durch 5 sondern auch durch 25 theilbar ist.

Ist eine Zahl von der zweyten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 10n + 1$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt, und also in dieser Formel $5n + 1$ enthalten ist.

Ist eine Zahl von der dritten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 20n + 4$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist eine Zahl von der vierten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 30n + 9$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist endlich eine Zahl von der fünften Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 40n + 16$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt. Wenn daher eine Quadratzahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; daher in diesen Formeln $5n + 2$ und $5n + 3$ kein Quadrat enthalten seyn kann.

73.

Aus diesem Grunde können wir auch beweisen, daß weder die Formel 5tt + 2uu noch diese 5tt + 3uu ein Quadrat werden könne. Denn entweder ist u durch 5 theilbar oder nicht: im erstern Fall würden sich diese Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen lassen, und also auch keine Quadrate seyn können. Ist aber u nicht theilbar durch 5, so ist uu entweder 5n + 1 oder 5n + 4, im erstern Fall wird die erste Formel 5tt + 10n + 2, welche durch 5 getheilt 2 übrig läßt; die andere aber wird 5tt + 15n + 3, welche durch 5 getheilt 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat seyn kann. Ist aber uu = 5n + 4, so wird die erste Formel 5tt + 10n + 8, welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt; die andere aber wird 5tt + 15n + 12, welche durch 3 dividirt 2 übrig läßt, und also auch in diesem Fall kein Quadrat werden kann.

Aus eben diesem Grunde sieht man auch, daß weder diese Formel 3tt + (5n + 2) uu, noch diese 5tt + (5n + 3) uu ein Quadrat seyn kann, weil eben dieselben Reste als vorher überbleiben, man kann auch sogar im ersten Glied 5mtt anstatt 5tt schreiben, wenn nur m nicht durch 5 theilbar ist.

74.

Wie alle gerade Quadraten in dieser Form 4n alle ungerade aber in dieser Form 4n + 1 enthalten sind, und also weder 4n + 2, noch 4n + 3, ein Quadrat seyn kann, so folgt daraus, daß diese allgemeine Formel (4m + 3) tt + (4n + 3) uu niemals ein Quadrat seyn kann. Denn wäre t gerade, so würde sich tt durch 4 theilen lassen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt 3 übrig lassen: wären aber beyde Zahlen t und u ungerade, so würden die Reste von tt und uu, 1 seyn, also von der ganzen Formel würde der

Rest seyn 2. Nun aber ist keine Zahl, welche durch 4 dividirt 2 übrig läßt, ein Quadrat; hier ist auch zu merken, daß so wohl m als n negativ, und auch = 0, genommen werden kann, daher weder diese Formel $3tt + 3uu$ noch diese $3tt - uu$ ein Quadrat seyn kann.

75.

Wie wir von den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate seyn können, so gilt dieses auch bey allen andern Theilern, daß sich immer einige Arten finden, die keine Quadrate seyn können.

Es sey der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadraten untersuchen wollen.

Arten der Zahlen	ihre Quadraten	gehören zu der Art
I. $7n$	$49nn$	$7n$
II. $7n + 1$	$49nn + 14n + 1$	$7n + 1$
III. $7n + 2$	$49nn + 28n + 4$	$7n + 4$
IV. $7n + 3$	$49nn + 42n + 9$	$7n + 2$
V. $7n + 4$	$49nn + 56n + 16$	$7n + 2$
VI. $7n + 5$	$49nn + 70n + 25$	$7n + 4$
VII. $7n + 6$	$49nn + 84n + 36$	$7n + 1$

Da nun die Quadraten, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drey Arten enthalten seyn müssen $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$, so werden die drey andern Arten von der Natur der Quadrate gänzlich ausgeschlossen. Diese Arten sind nun $7n + 3$, $7n + 5$, $7n + 6$, und der Grund davon ist offenbar, weil sich immer zwey Arten finden davon die Quadraten zu einer Gattung gehören.

76.

Um dieses deutlicher zu zeigen, so bemerke man, daß die letzte Art $7n + 6$ auch also $7n - 1$ ausgedrückt werden kann; eben so ist auch die Formel $7n + 5$ mit dieser $7n - 2$ einerley, und $7n + 4$ ist eben so viel als $7n - 3$. Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwey Arten der Zahlen $7n + 1$ und $7n - 1$ die Quadrate durch 7 dividirt einerley übrig lassen, nämlich 1; eben so sind auch die Quadraten dieser beyden Arten $7n + 2$ und $7n - 2$ von einerley Gattung.

77.

Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen seyn mag, welchen wir mit dem Buchstaben d andeuten wollen, sind die daher entstehenden verschiedene Arten der Zahlen folgende

dn;

$dn + 1$, $dn + 2$, $dn + 3$. &c.

$dn - 1$, $dn - 2$, $dn - 3$. &c.

wo die Quadrate von $dn + 1$ und $dn - 1$ dieses gemein haben, daß sie durch d dividirt 1 übrig lassen, und also beyde zu einer Art nämlich zu $dn + 1$ gehören. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Arten $dn + 2$ und $dn - 2$, deren Quadrate zu der Art $dn + 4$ gehören.

Und also überhaupt gilt es auch von diesen zwey Arten $dn + a$ und $dn - a$, deren Quadrate durch d dividirt einerley übrig lassen, nämlich aa; oder so viel als übrig bleibt, wenn man aa durch d theilt.

78.

Auf diese Weise erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln $att + buu$, welche auf keinerley Weise Quadrate werden können. Also aus dem Theiler 7 erkennt man leicht, daß keine von die-

sen drey Formeln $7tt + 3uu$, $7tt + 5uu$ und $7tt + 6uu$ jemals ein Quadrat werden kann, weil u durch 7 dividirt entweder 1 oder 2 oder 4 übrig läßt: ferner, weil bey der ersten entweder 3 oder 6 oder 5, bey der zweyten entweder 5 oder 3 oder 6, bey der dritten entweder 6 oder 5 oder 3 übrig blieb, welches bey keinem Quadrat geschehen kann. Wenn nun dergleichen Formeln vorkommen, so ist alle Mühe vergebens, die man sich geben wollte, um irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen mögte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine vorgegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viel andere Fälle gefunden werden sollen.

Die vorgegebene Formel war eigentlich $axx + b$, und weil gemeiniglich für x Brüche gefunden werden, so haben wir gesetzt $x = \frac{t}{u}$, also daß diese Formel $att + buu$ zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch öfters unendlich viel Fälle, wo so gar x in ganzen Zahlen gegeben werden kann, wie nun dieselben ausfindig zu machen, soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.

Capitel

Capitel 6.

Von den Fällen in ganzen Zahlen, da die Formel axx + b ein Quadrat wird.

79.

Wir haben schon oben gewiesen, wie solche Formeln a + bx + cxx verwandelt werden sollen, daß das mittlere Glied wegfalle, und daher begnügen wir uns die gegenwärtige Abhandlung nur auf diese Form axx + b einzuschränken, wobey es darauf ankommt, daß für x nur ganze Zahlen gefunden werden sollen aus welchen die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey, denn wäre sie unmöglich, so könnten nicht einmal Brüche für x, geschweige denn ganze Zahlen, statt finden.

80.

Man setze also diese Formel axx + b = yy, da denn beyde Buchstaben x und y ganze Zahlen seyn sollen, weil a und b dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in ganzen Zahlen wisse oder errathen habe, denn sonst würde alle Mühe überflüßig seyn mehr dergleichen Fälle zu suchen, weil vielleicht die Formel selbst unmöglich seyn möchte.

Wir wollen demnach annehmen daß diese Formel ein Quadrat werde wenn man setzt x = f, und wollen das Quadrat durch gg andeuten, also daß aff + b=gg wo demnach f und g bekannte Zahlen sind. Es kommt also nur darauf an, wie aus diesem Fall noch andere

Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

§1.

Da nun schon gefunden worden $aff + b = gg$, und über dieses auch seyn soll $axx + b = yy$, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, um zu bekommen $axx - aff = yy - gg$, welche sich also durch Factoren ausdrücken läßt $a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$; man multiplicire beyderseits mit pq, so hat man $apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g)$: um nun diese Gleichheit heraus zu bringen mache man diese Vertheilung $ap(x+f) = q(y+g)$ und $q(x-f) = p(y-g)$, und aus diesen beyden Gleichungen suche man die beyden Buchstaben x und y: die erste durch q dividirt giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$;

die andere durch p dividirt giebt $y - g = \frac{qx - qf}{p}$; diese von jener subtrahirt giebt $2g = \frac{(app-qq)x + (app+qq)f}{pq}$,

mit pq multiplicirt wird $2pqg = (app - qq)x + (app+qq)f$, und daher $x = \frac{2gpq}{app-qq} - \frac{(app+qq)f}{app-qq}$,

und hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gqq}{app-qq} - \frac{(app+qq)fq}{(app-qq)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey erstere Glieder den Buchstaben g, welche zusammen gezogen geben $\frac{g(app+qq)}{app-qq}$; die beyden andern enthalten den Buch-

staben

staben kund geben unter einer Benennung $-\frac{2afpq}{app-qq}$,

daher wir erhalten $y = \frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}$.

82.

Diese Arbeit scheinet unserm Endzweck gar nicht gemäß zu seyn, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, da wir doch für x und y ganze Zahlen finden sollten, und es würde auf eine neue Frage ankommen, was man für p und q für Zahlen annehmen müßte damit die Brüche wegfallen? welche Frage noch schwerer scheint als unsere Hauptfrage. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgriff angewendet werden, wodurch wir leicht zu unserm Endzwecke gelangen: denn da hier alles in ganzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{app+qq}{app-qq} = m$ und $\frac{2pq}{app-qq} = n$, damit man habe $x = ng - mf$ und $y = mg - naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müssen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Ende laßt uns ihre Quadrate betrachten, da wir denn haben werden

$$mm = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4}$$

$$\text{und } nn = \frac{4ppqq}{aap^4 - 2appqq + q4}$$

daher bekommen wir:

$$mm - ann = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4 - 4appqq}{aap^4 - 2appqq + q^4}$$

$$= \frac{aap^4 - 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4} = 1.$$

83.

Hieraus sieht man, daß die beyden Zahlen m und n also beschaffen seyn müssen, daß $mm = ann + 1$. Da nun a eine bekannte Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht seyn eine solche ganze Zahl für n zu finden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, von welchem hernach m die Wurzel ist, und so bald man eine solche gefunden, und über dieses auch die Zahl f gefunden, daß $aff + b$ ein Quadrat werde nämlich gg, so bekommt man vor x und y folgende Werthe in ganzen Zahlen $x = ng - mf$, und $y = mg - naf$, und dadurch wird $axx + b = yy$.

84.

Es ist vor sich klar, daß wenn einmal m und n gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil daß Quadrat nn doch einerley bleibt.

Um daher x und y in ganzen Zahlen zu finden, auf daß $axx + b = yy$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nämlich sey $aff + b = gg$, sobald dieser Fall bekannt ist, so muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $ann + 1 = mm$ werde, wozu in folgendem die Anleitung soll gegeben werden. Ist nun dieses geschehen, so hat man sogleich einen neuen Fall, nämlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da denn seyn wird $axx + b = yy$.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen der für bekannt angenommen worden und schreibt $ng + mf$, anstatt f und $mg + naf$, anstatt g, so bekommen wir für x und y wiederum neue Werthe, aus welchen weiter, wenn sie für f und g gesetzt werden, andere neue heraus gebracht werden, und so immerfort, also daß wenn man anfänglich nur einen solchen

Fall

Fall gehabt, man daraus unendlich viel andere ausfindig machen kann.

85.

Die Art wie wir zu dieser Auflösung gelanget sind, war ziemlich mühsam und schien anfänglich von unserm Endzweck sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein besonders Glück haben weggeschafft werden können, es wird daher gut seyn noch einen andern kürzern Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieser Auflösung führet.

86.

Da seyn soll $axx + b = yy$ und man schon gefunden hat $aff + b = gg$, so giebt uns jene Gleichung $b = yy - axx$, diese aber $b = gg - aff$, folglich muß auch seyn $yy - axx = gg - aff$, und jetzt kommt alles darauf an, daß man aus den bekannten Zahlen f und g die unbekannten x und y finden soll: da denn sogleich in die Augen fällt, daß diese Gleichung erhalten werde, wenn man setzt $x = f$ und $y = g$: allein hieraus erhält man keinen neuen Fall außer den der schon für bekannt genommen wird.

Wir wollen demnach setzen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, oder daß da sey $ann + 1 = mm$, daher wird nun $mm - ann = 1$, damit multiplicire man in der obigen Gleichung den Theil $gg - aff$ so muß auch seyn $yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$. Laßt uns zu diesem Ende setzen $y = gm + afn$, so bekommen wir:
$ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$, wo sich die Glieder $ggmm$ und $aaffnn$ einander aufheben und wir also bekommen $axx = affmm + aggnn + 2afgmn$,

welche Gleichung durch a getheilt giebt $xx = ffmm + ggnn + 2fgmn$, welche Formel offenbar ein Quadrat ist, daraus wir erhalten $x = fm + gn$, welches eben die Formeln sind die wir vorher gefunden haben.

87.

Es wird nun nöthig seyn diese Auflösung durch einige Exempel zu erläutern.

I. Frage: Man suche alle ganze Zahlen für x also daß $2xx - 1$ ein Quadrat werde, oder daß sey $2xx - 1 = yy$?

Hier ist $a = 2$ und $b = -1$, der erste Fall so in die Augen fällt ist nun wenn man nimmt $x = 1$ und $y = 1$. Aus diesem bekannten Falle haben wir nun $f = 1$ und $g = 1$; es wird aber ferner erfordert eine solche Zahl für n zu finden, daß $2nn + 1$ ein Quadrat werde nämlich mm, solches geschiehet nun wenn $n = 2$ und $m = 3$, daher wir aus einem jeden bekannten Fall f und g diese neue finden $x = 3f + 2g$, und $y = 3g + 4f$; da nun der erste bekannte Fall ist $f = 1$ und $g = 1$, so finden wir daraus folgende neue Fälle.

$x = f = 1$	5	29	169
$y = g = 1$	7	41	239 &c.

88.

II. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind?

Es sey z die Dreyeckswurzel, so ist das Dreyeck $\frac{zz + z}{2}$, welches ein Quadrat seyn soll. Die Wurzel davon sey x, so muß seyn $\frac{zz + z}{2} = xx$: Man multi-

plicire

plicire mit 8 so wird $4zz+4z = 8xx$ und beyderseits 1 addirt, giebt $4zz+4z+1 = (2z+1)^2 = 8xx+1$. Es kommt also darauf an, daß $8xx+1$ ein Quadrat werde, und wenn man setzt $8xx+1 = yy$, so wird $y = 2z+1$, und also die gesetzte Dreyeckwurzel $z = \frac{y-1}{2}$.

Hier ist nun $a = 8$, und $b = 1$, und der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, nämlich $f = 0$ und $g = 1$. Damit ferner werde $8nn+1 = mm$, so ist $n = 1$ und $m = 3$; daher bekommt man $x = 3f+g$ und $y = 3g+8f$, und $z = \frac{y-1}{2}$; hieraus bekommen wir also folgende Auflösungen.

$x = f$	$= 0$	1	6	35	204	1189	
$y = g$	$= 1$	3	17	99	577	3363	
$z = \frac{y-1}{2}$	$= 0$	1	8	49	288	1681	&c.

89.

III. Frage: Man suche alle Fünfeckszahlen, welche zugleich Quadratzahlen sind?

Die Fünfeckswurzel sey $= z$, so ist das Fünfeck $= \frac{3zz-z}{2}$, so dem Quadrat xx gleich gesetzt werde; daher wird $3zz - z = 2xx$; man multiplicire mit 12 und addire, so wird $36zz - 12z + 1 = 24xx + 1 = (6z-1)^2$.

Setzt man nun $24xx+1 = yy$, so ist $y = 6z-1$ und $z = \frac{y+1}{6}$: da nun hier $a = 24$, $b = 1$, so ist der bekannte Fall $f = 0$ und $g = 1$. Da hernach seyn muß

24nn

$24nn + 1 = mm$, so nehme man $n = 1$ und da wird $m = 5$, daher erhalten wir $x = 5f + g$ und $y = 5g + 24f$, und $z = \frac{y+1}{6}$; oder auch $y = 1 - 6z$, so wird ebenfalls $z = \frac{1-y}{6}$, woraus folgende Auflösungen gefunden werden.

$x = f = 0$	1	10	99	980
$y = g = 1$	5	49	485	4801
$z = \frac{y+1}{6} = \frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder $z = \frac{1-y}{6} = 0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

90.

IV. Frage: Man suche alle Quadrate in ganzen Zahlen, welche siebenmal genommen und dazu 2 addirt wiederum Quadrate werden?

Hier wird also gefordert, daß seyn soll $7xx + 2 = yy$, wo $a = 7$ und $b = 2$; der bekannte Fall fällt sogleich in die Augen, wenn $x = 1$ und denn ist $x = f = 1$ und $y = g = 3$. Nun betrachte man die Gleichung $7nn + 1 = mm$, und da findet man leicht $n = 3$ und $m = 8$; daher erhalten wir $x = 8f + 3g$ und $y = 8g + 21f$, woraus die folgenden Werthe für x gefunden werden.

$x = f = 1$	17	271	
$y = g = 3$	45	717	

91.

V. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich fünfeckigte Zahlen sind?

Es

Es sey die Dreyeckswurzel = p und die Fünfecks-wurzel = q, so muß seyn $\frac{pp+p}{2} = \frac{3qq-q}{2}$, oder $3qq - q = pp + p$; hieraus suche man q, und da $qq = \frac{1}{3}q + \frac{pp+p}{3}$, so wird $q = \frac{1}{6} \pm r\left(\frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{pp+p}{3}\right)$, das ist $q = \frac{1 \pm r(12pp+12p+1)}{6}$. Es kommt also darauf an, daß $12pp + 12p + 1$ ein Quadrat werde, und das in ganzen Zahlen. Da nun hier das mittlere Glied $12p$ vorhanden ist, so setze man $p = \frac{x-1}{2}$; dadurch bekommen wir $12pp = 3xx - 6x + 3$ und $12p = 6x - 6$, daher $12pp + 12p + 1 = 3xx - 2$, welches ein Quadrat seyn muß.

Setzen wir demnach $3xx - 2 = yy$, so haben wir daraus $p = \frac{x-1}{2}$ und $q = \frac{1+y}{6}$; da nun die ganze Sache auf die Formel $3xx - 2 = yy$ ankommt, so ist $a = 3$ und $b = -2$, und der bekannte Fall $x = f = 1$ und $y = g = 1$: hernach haben wir für diese Gleichung $mm = 3nn + 1$: $n = 1$ und $m = 2$, daraus wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q, erhalten.

Daher also ist $x = 2f + g$ und $y = 2g + 3f$, so wird:

	$x = f = 1$	3	11	41
	$y = g = 1$	5	19	71
	$p = 0$	1	5	20
	$q = \frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}0$	12
oder	$q = 0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{3}{3}\frac{5}{3}$

weil nämlich auch $q = \frac{1-y}{6}$ ist.

92.

Bisher waren wir gezwungen aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuschaffen, wenn eines vorhanden war: man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formel anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden ist, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Formel, die ein Quadrat seyn soll, diese $axx + bx + c = yy$, und hievon sey schon dieser Fall bekannt $aff + bf + c = gg$.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der obigen, so wird $a(xx - ff) + b(x - f) = yy - gg$, welche also durch Factores ausgedrückt werden kann $(x - f)(ax + af + b) = (y - g)(y + g)$. Man multiplicire beyderseits mit pq, so wird $pq(x - f)(axx + af + b) = pq(y - g)(y + g)$, welche in diese zwey zergliedert werden I.) $p(x - f) = q(y - g)$. II.) $q(ax + af + b) = p(y + g)$. Man multiplicire die erste mit p, die andere mit q, und subtrahire jenes von diesem, so kommt $(aqq - pp)x + (aqq + pp)f + bqq = 2gpq$, daraus finden wir $x = \frac{agpq}{aqq-pp} - \frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp} - \frac{bqq}{aqq-pp}$.

Aus der ersten Gleichung ist $q(y - g) = p(x - f)$

$= p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp} - \frac{2afqq}{aqq-pp} - \frac{bqq}{aqq-pp}\right)$; also $y - g$

$= \frac{2gpp}{aqq-pp} - \frac{2afpq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp}$, und daher $y = g$

$\left(\frac{aqq+pp}{aqq-pp}\right) - \frac{2afpq}{aqq-pp} - \frac{bpq}{aqq-pp}$.

Um diese Brüche wegzubringen, so setze man wie oben geschehen $\frac{aqq+pp}{aqq-pp} = m$ und $\frac{2pq}{aqq-pp} = n$, so wird

$m+1 = \frac{2aqq}{aqq-pp}$ und also $\frac{qq}{aqq-pp} = \frac{m+1}{2a}$: also wird seyn $x = ng - mf - b\frac{(m+1)}{2a}$ und $y = mg - naf - \frac{1}{2}bn$, wo die Buchstaben m und n eben so beschaffen seyn müssen, wie oben, nämlich daß $mm = ann + 1$.

93.

Solcher gestalt sind aber die für x und y gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die den Buchstaben b enthaltende Glieder Brüche sind, und also unserm Endzweck kein Genüge leisten. Allein es ist zu merken, daß wenn man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, dieselben immer ganze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q, finden kann. Denn man nehme p und q dergestalt an, daß $pp = aqq + 1$; da nun $aqq - pp = -1$, so fallen daselbst die Brüche von selbst weg: und da wird $x = -2gpq + f(aqq + pp) + bqq$ und $y = -g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$, weil aber in dem bekannten Fall $aff + bf + c = gg$ nur das Quadrat gg vorkommt, so ist es gleich viel ob man dem Buchstaben g das Zeichen + oder − giebt; man schreibe also −g anstatt + g, so werden unsere Formeln seyn: $x = 2gpq + f(aqq + pp) + bqq$; und $y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$, da denn gewiß seyn wird $axx + bx + c = yy$.

Man suche z. E. diejenigen Sechseckzahlen, welche zugleich Quadrate sind?

Da muß denn seyn $2xx - x = yy$, wo $a = 2$, $b = -1$, und $c = 0$; der bekannte Fall ist hier offenbar $x = f = 1$; und $y = g = 1$.

Da

Da hernach seyn muß $pp = 2qq + 1$, so wird $q = 2$, und $p = 3$; daher wir erhalten $x = 12g + 17f - 4$ und $y = 17g + 24f - 6$; woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x = f =$	1	25	841	
$y = g =$	1	35	1189	&c.

94.

Wir wollen aber bey der erstern Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben und die Fälle in Erwegung ziehen, wo die Formel $axx + b$ ein Quadrat wird in ganzen Zahlen.

Es sey demnach $axx + b = yy$ und hiezu werden zwey Stücke erfordert:

Erstlich daß man einen Fall wisse, wo dieses geschiehet: derselbe sey nun $aff + b = gg$.

Zweytens daß man solche Zahlen für m und n wisse, daß $mm = ann + 1$, wozu in folgendem Capitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nämlich $x = ng + mf$ und $y = mg + anf$, aus welchem hernach gleicher Gestalt neue Fälle gefunden werden können, welche wir folgender Gestalt vorstellen wollen:

$x = f$	A	B	C	D	E	
$y = g$	P	Q	R	S	T	&c.

wo $A = ng + mf$	$B = nP + mA$	$C = nQ + mB$	$D = nR + mC$	
und $P = mg + anf$	$Q = mP + anA$	$R = mQ + anB$	$S = nR + anC$	&c.

welche beyde Reihen Zahlen man mit leichter Mühe so weit fortsetzen kann als man will.

95.

Nach dieser Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen ohne zugleich die untere zu wissen,

sen, noch die untere ohne die obere zu wissen. Man kann aber leicht eine Regel angeben die obere Reihe allein fortzusetzen ohne die untere zu wissen, welche Regel auch für die untere Reihe gilt ohne daß man nöthig hätte die obere zu wissen.

Die Zahlen nämlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten nach einer gewissen Progression fort wovon man ein jedes Glied z. E. E aus den zwey vorhergehenden C und D, bestimmen kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Denn da $E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$, das ist $E = 2mnR + annC + mmC$, so wird, weil $nR = D - mC$, gefunden $E = 2mD - mmC + annC$ oder $E = 2mD - (mm - ann)C$; da aber $mm = ann + 1$ also $mm - ann = 1$, so haben wir $E = 2mD - C$, woraus erhellet, wie eine jede dieser obern Zahlen aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Denn da $T = mS + anD$, und $D = nR + mC$, so wird $T = mS + annR + amnC$. Da nun ferner $S = mR + anC$, so ist $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geschrieben giebt, $T = 2mS - R$, also daß die untere Reihe nach eben der Regel fortschreitet als die obere.

Man suche z. E. alle ganze Zahlen x, daß da werde $2xx - 1 = yy$. Da ist nun $f = 1$ und $g = 1$: ferner damit $mm = 2nn + 1$, so wird $n = 2$ und $m = 3$. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwey ersten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach dieser Regel gefunden werden $E = 6D - C$, nämlich ein jedes Glied sechsmal genommen weniger den vorhergehenden giebt das folgende; daher die für x verlangte Zahlen nach dieser Regel also fortgehen:

1, 5, 29, 169, 985, 5741 ꝛc.

Woraus man sieht daß diese Zahlen unendlich weit fortgesetzt werden können. Wollte man aber auch

Brüche gelten lassen, so würde nach der oben gegebenen Methode eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.

Capitel 7.

Von einer besondern Methode die Formel ann + 1 zu einem Quadrat in ganzen Zahlen zu machen.

96.

Was in dem vorigen Capitel vorgetragen worden, kann nicht zur Ausführung gebracht werden, wenn man nicht im Stande ist für eine jegliche Zahl a, eine solche ganze Zahl n zu finden, daß ann + 1 ein Quadrat werde, oder daß man bekomme mm = ann + 1.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde diese Gleichung leicht aufzulösen seyn, indem man nur setzen dürfte $m = 1 + \frac{np}{q}$. Denn da

wird $mm = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{nnpp}{qq} = ann + 1$, wo sich beyderseits das 1 aufhebt und die übrigen Glieder durch n theilen lassen, da denn mit qq multiplicirt kommt $2pq + npp = anqq$, daraus gefunden wird

$n = \frac{2pq}{aqq - pp}$, woraus unendlich viel Werthe für n gefunden werden können. Da aber n eine ganze Zahl seyn soll, so hilft uns dieses nichts, daher eine ganz andere Methode gebraucht werden muß, um dieses zu finden.

97.

97.

Vor allen Dingen aber ist zu merken, daß wenn ann + 1 ein Quadrat in ganzen Zahlen werden soll, a mag eine Zahl seyn was man vor eine will, solches nicht allezeit möglich sey.

Denn erstlich werden alle Fälle ausgeschlossen, wo a eine negative Zahl ist; hernach werden auch alle die Fälle ausgeschlossen, wo a selbst eine Quadrat Zahl ist, weil alsdenn ann ein Quadrat seyn würde, kein Quadrat aber + 1 in ganzen Zahlen ein Quadrat seyn kann. Daher muß unsere Formel also eingeschränkt werden, daß der Buchstabe a weder eine negative noch eine Quadratzahl sey; so oft aber a eine positive Zahl und kein Quadrat ist, so kann allezeit für n eine solche ganze Zahl gefunden werden, daß ann + 1 ein Quadrat werde

Hat man aber eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht aus dem vorigen Capitel, unendlich viel andere herzuleiten. Zu unserem Vorhaben aber ist es genug, eine einige und zwar die kleinste ausfündig zu machen.

98.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, Namens Pell, eine ganz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Dieselbe aber ist nicht so beschaffen, daß sie auf eine allgemeine Art für eine jegliche Zahl a, sondern nur für einen jeglichen Fall besonders gebraucht werden kann.

Wir wollen demnach von den leichteren Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen daß 2nn + 1 ein Quadrat werde, oder daß $\sqrt{}(2nn+1)$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß diese Quadratwurzel größer seyn werde als n, doch aber kleiner als 2n. Man setze daher dieselbe = n + p so wird p ge-

wiß kleiner seyn als n. Also haben wir $\surd(2nn+1) = n+p$ und daher $2nn+1 = nn+2np+pp$, woraus wir nun n suchen wollen. Da nun ist $nn = 2np+pp-1$ so wird $n = p+\surd(2pp-1)$.

Es kommt also darauf an, daß $2pp-1$ ein Quadrat werde, welches geschiehet wenn $p=1$ und hieraus findet man $n=2$ und $\surd(2nn+1)=3$. Wäre dieses letztere nicht sogleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\surd(2pp-1)$ größer als p und daher n größer als 2p, so setze man $n=2p+q$, da denn wird $2p+q=p+\surd(2pp-1)$ oder $p+q=\surd(2pp-1)$, hievon die Quadrate genommen, kommt $pp+2pq+qq=2pp-1$ oder $pp=2pq+qq+1$ und daraus wird $p=q+\surd(2qq+1)$, also muß $2qq+1$ ein Quadrat seyn, welches geschiehet wenn $q=0$ daher $p=1$ und $n=2$. Aus diesem Exempel kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

99.

Es sey nun $a=3$, so daß die Formel $3nn+1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\surd(3nn+1)=n+p$, da wird $3nn+1=nn+2np+pp$ und $2nn=2np+pp-1$ und daraus $n=\frac{p+\surd(3pp-2)}{2}$: da nun $\surd(3pp-2)$ größer als p und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p, so setze man $n=p+q$, da wird $2p+2q=p+\surd(3pp-2)$ oder $p+2q=\surd(3pp-2)$: hiervon die Quadrate genommen, wird $pp+4pq+4qq=3pp-2$ oder $2pp=4pq+4qq+2$, das ist $pp=2pq+2qq+1$, daher $p=q+\surd(3qq+1)$. Diese Formel ist der gegebenen gleich und also $q=0$

leistet

leistet ein Genüge, daraus wird $p = 1$ und $n = 1$, also $r(3nn + 1) = 2$.

100.

Nun sey $a = 5$ um diese Formel $5nn + 1$ zu einem Quadrat zu machen, davon die Wurzel größer ist als $2n$: daher setze man $r(5nn + 1) = 2n + p$ da wird $5nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ und daraus $nn = 4np + pp - 1$; daher $n = 2p + r(5pp - 1)$. Weil nun $r(5pp - 1)$ größer ist als $2p$, so ist auch n größer als $4p$; deswegen setze man $n = 4p + q$, so wird $2p + q = r(5pp - 1)$ oder $4pp + 4pq + qq = 5pp - 1$; daher $pp = 4pq + qq + 1$ und also $p = 2q + r(5qq + 1)$; dieser geschieht ein Genüge wenn $q = 0$, folglich $p = 1$ und $n = 4$; daher $r(5nn + 1) = 9$.

101.

Es sey ferner $a = 6$ um $6nn + 1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel größer ist als $2n$. Man setze deswegen $r(6nn + 1) = 2n + p$, so wird $6nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ oder $2nn = 4np + pp - 1$ und daher $n = p + \frac{r(6pp - 2)}{2}$, oder $n = \frac{2p + r(6pp - 2)}{2}$ also n größer als $2p$, man setze deswegen $n = 2p + q$, so wird $4p + 2q = 2p + r(6pp - 2)$ oder $2p + 2q = r(6pp - 2)$. Die Quadrate genommen, wird $4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$ oder $2pp = 8pq + 4qq + 2$, das ist $pp = 4pq + 2qq + 1$, woraus gefunden wird $p = 2q + r(6qq + 1)$; welche Formel der ersten gleich ist, und also $q = 0$ gesetzt werden kann, daraus denn wird $p = 1$ und $n = 2$, also $r(6nn + 1) = 5$

102.

Es sey weiter $a = 7$ und $7nn + 1 = mm$; es ist also m größer als $2n$, daher setze man $m = 2n + p$,

$+p$, so wird $7nn+1=4nn+4np+pp$ oder $3nn=4np+pp-1$, daraus gefunden wird $n=\frac{2p+r(7pp-3)}{3}$. Da nun n größer ist als $\frac{4}{3}p$ und also größer als p, so setze man $n=p+q$, so wird $p+3q=r(7pp-2)$, die Quadrate genommen $pp+6pq+9qq=7pp-3$; $6pp=6pq+9qq+3$, oder $2pp=2pq+3qq+1$, daraus kommt $p=\frac{q+r(7qq+2)}{2}$. Da nun hier n größer ist als $\frac{3q}{2}$, also größer als q, so setze man $p=q+r$, so wird $q+2r=r(7qq+2)$, die Quadrate genommen $qq+4qr+4rr=7qq+2$ oder $6qq=4qr+4rr-2$ oder $3qq=2qr+2rr-1$ daraus gefunden wird $q=\frac{r+r(7rr-3)}{3}$. Da nun q größer ist als r, so setze man $q=r+s$, da wird $21+35=r(7rr-3)$. Die Quadrate genommen;
$4rr+12rs+9ss=7rr-3$, oder $3rr=12rs+9ss+3$ und $rr=4rs+3ss+1$; also $r=2s+r(7ss+1)$. Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s=0$, und da bekommt man $r=1$, $q=1$, $p=2$ und $n=3$, daraus $m=8$.

Diese Rechnung kann folgender Gestalt sehr abgekürzt werden, welches auch in andern Fällen statt findet.

Da $7nn+1=mm$, so ist m kleiner als $3n$. Man setze deswegen $m=3n-p$, so wird $7nn+1=9nn-6np+pp$ oder $2nn=6np-pp+1$, und daraus $n=\frac{3p-r(7pp+2)}{2}$, also ist n kleiner als $3p$, deswegen setze man $n=3p-q$, so wird $3p-2q=r(7pp+2)$ und die Quadrate genommen $9pp-12pq+4qq$

$+4qq = 7pp + 2$, oder $2pp = 12pq - 4qq + 2$ und $pp = 6pq - 2qq + 1$, daraus wird $p = 3q + r(7qq+1)$. Hier kann man nun sogleich setzen $q = 0$, da wird $p = 1$, $n = 3$, und $m = 8$ wie vorher.

103.

Nehmen wir ferner $a = 8$, also daß $8nn + 1 = mm$ und daher m kleiner als $3n$, so setze man $m = 3n - p$, so wird $8nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, oder $nn = 6np - pp + 1$, daraus $n = 3p + r(8pp + 1)$, welche Formel der ersten schon gleich ist, daher man setzen kann $p = 0$, da kommt $n = 1$ und $m = 3$.

104.

Gleichergestalt verfährt man für eine jegliche andere Zahl a, wenn dieselbe nur positiv und kein Quadrat ist, und man kommt immer endlich zu einem solchen Wurzelzeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. E. zu dieser $r(att + 1)$, da man denn nur setzen darf $t = 0$, als in welchem Fall die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf wenn man zurück geht, erhält man einen Werth für n, daß $ann + 1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Endzweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, je nach Beschaffenheit der Zahl a, wovon man doch keine gewisse Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich geschwind, kommt man aber zu $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläuftiger und daher wird es gut seyn diesen Fall allhier auszuführen.

105.

Es sey demnach $a = 13$ also daß seyn soll $13nn + 1 = mm$. Weil nun mm größer ist als $9nn$, und also m größer als $3n$, so setze man $m = 3n + p$, da wird $13nn + 1 = 9nn + 6np + pp$, oder $4nn = 6np + pp$

$+ pp - 1$, daraus $n = \frac{3p + r(13pp - 4)}{4}$, daher n größer als $\frac{6}{4}$ p und also größer als p. Man setze also $n = p + q$, so wird $p + 4q = r(13pp - 4)$; die Quadrate genommen $13pp - 4 = pp + 8pq + 16qq$, daher $12pp = 8pq + 16qq + 4$, oder durch 4 getheilt $3pp = 2pq + 4qq + 1$ und daraus $p = \frac{q + r(13qq + 3)}{3}$.

Hier ist p größer als $\frac{q + 3q}{3}$, also größer als q: man setze demnach $p = q + r$, so wird:
$2q + 3r = r(13qq + 3)$, das Quadrat genommen $13qq + 3 = 4qq + 12qr + 9rr$, das ist $9qq = 12qr + 9rr - 3$, durch 3 dividirt $3qq = 4qr + 3rr - 1$, daraus wird $q = \frac{2r + r(13rr - 3)}{3}$. Hier ist q größer als $\frac{2r + 3r}{3}$ und also q größer als r; daher setze man $q = r + s$, so wird $r + 3s = r(13rr - 3)$: das Quadrat genommen $13rr - 3 = rr + 6rs + 9ss$, oder $12rr = 6rs + 9ss + 3$, durch 3 dividirt wird $4rr = 2rs + 3ss + 1$ und daraus $r = \frac{s + r(13ss + 4)}{4}$. Hier ist r größer als $\frac{s + 3s}{4}$ oder s, daher setze man $r = s + t$, so wird $3s + 4t = r(13ss + 4)$: das Quadrat genommen $13ss + 4 = 9ss + 24st + 16tt$ und also $4ss = 24ts + 16tt - 4$, durch 4 dividirt $ss = 6ts + 4tt - 1$, daraus wird $s = 3t + r(13tt - 1)$. Also ist s größer als $3t + 3t$ oder $6t$; deswegen setze man $s = 6t + u$, so wird $3t + u = r(13tt - 1)$, das Quadrat genommen $13tt - 1 = 9tt + 6tu + uu$ und daraus $4tt = 6tu + uu + 1$

$+1$ und $t = \frac{3u + r(13uu+4)}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$ und also größer als u. Man setze deswegen $t=u+v$, so wird $u + 4v = r(13uu + 4)$: das Quadrat genommen $13uu + 4 = uu + 8uv + 16vv$ und $12uu = 8uv + 16vv - 4$, durch 4 dividirt $3uu = 2uv + 4vv - 1$, daraus $u = \frac{v + r(13vv-3)}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als v, deswegen setze man $u = v + x$, so wird $2v + 3x = r(13vv - 3)$; das Quadrat genommen $13vv - 3 = 4vv + 12vx + 9xx$ oder $9vv = 12vx + 9xx + 3$, durch 3 dividirt $3vv = 4vx + 3xx + 1$, daraus man findet $v = \frac{2x + r(13xx+3)}{3}$, wo v größer ist als $\frac{5}{3}x$ und also größer als x, deswegen setze man $v = x + y$, so wird $x + 3y = r(13xx+3)$, die Quadrate genommen $13xx + 3 = xx + 6xy + 9yy$ oder $12xx = 6xy + 9yy - 3$, durch 3 dividirt $4xx = 2xy + 3yy - 1$ und $x = \frac{y + r(13yy-4)}{4}$, wo x größer ist als y: deswegen setze man $x = y + z$, so wird $3y + 4z = r(13yy - 4)$, die Quadrate genommen $13yy - 4 = 9yy + 24yz + 16zz$ oder $4yy = 24yz + 16zz + 4$, durch 4 dividirt $yy = 6yz + 4zz + 1$, daraus $y = 3z + r(13zz + 1)$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist so setze man $z = 0$, und da bekommt man rückwärts gehend, wie folget:

$z = 0$
$y = 1$
$x = y + z = 1$
$v = x + y = 2$
$u = v + x = 3$
$t = u + v = 5$

$s = 6t + u = 33$
$r = s + t = 38$
$q = r + s = 71$
$p = q + r = 109$
$n = p + q = 180$
$m = 3n + p = 649$

Also ist 180 nach o die kleinste ganze Zahl für n, daß $13nn + 1$ ein Quadrat werde.

106.

Aus diesem Exempel sieht man zur Genüge, wie langwierig bisweilen eine solche Rechnung werden könne. Denn unter den größern Zahlen hat man oft nöthig wohl zehnmal mehr Operationen zu machen, als hier bey der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen bey welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird, daher es dienlich ist, sich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchstaben m und n vorgestellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl a die gehörigen Buchstaben m und n hernehmen könne.

107.

Inzwischen ist zu merken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden werden können; dieses geschiehet aber nur bey denen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadratzahl, welches zu zeigen der Mühe Werth seyn wird.

108.

Es sey demnach $a = ee - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadratzahl, und da seyn soll $(ee - 2)nn + 1$

$+1 = mm$, so ist offenbar m kleiner als en, deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(ee-2)nn + 1 = eennn - 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = \frac{ep + r(eepp - 2pp + 2)}{2}$, wo sogleich in die Augen fällt, daß wenn man nimmt $p = 1$, das Wurzelzeichen wegfalle und da seyn werde $n = e$ und $m = ee - 1$.

Wäre z. E. $n = 23$, wo $e = 5$, so wird $23nn + 1 = mm$, wenn $n = 5$ und $m = 24$. Dieses ist auch an sich offenbar; denn setzt man $n = e$, wenn nämlich $a = ee - 2$, so wird $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee - 1$.

109.

Es sey nun auch $a = ee - 1$ nämlich um 1 weniger als eine Quadratzahl, also daß seyn soll $(ee-1)nn + 1 = mm$. Da nun hier wieder m kleiner ist als en, so setze man $m = en - p$, so wird $(ee-1)nn+1 = eennn - 2enp + pp$, oder $nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = ep + r(eepp - pp + 1)$: wo das Wurzelzeichen wegfällt, wenn $p = 1$, und daraus bekommt man $n = 2e$, und $m = 2ee - 1$. Dieses ist auch leicht zu sehen: Denn da $a = ee - 1$ und $n = 2e$, so wird $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$ welches das Quadrat ist von $2ee - 1$. Es sey z. E. $a = 24$ also daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24nn + 1 = 2401 = (49)^2$. *)

110.

*) Das Wurzelzeichen in diesem Fall verschwindet auch, wenn $p = 0$ gesetzt wird; daher wir denn unstreitig die kleinste Zahlen für n und m erhalten, welche sind $n = 1$ und $m = e$. Also wird wenn $e = 5$, die Formel $24nn + 1$ ein Quadrat wenn $n = 1$, und die Wurzel dieses Quadrats $m = e = 5$.

110.

Es sey nun auch $a = ee + 1$, oder um 1 größer als eine Quadratzahl, also daß seyn soll $(ee + 1)nn + 1 = mm$, wo m augenscheinlich größer ist als en, deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(ee + 1) nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $nn = 2enp + pp - 1$, und daraus $n = ep + r\,(eepp + pp - 1)$ wo $p = 1$ genommen werden kann, und da wird $n = 2e$ und $m = 2ee + 1$: dieses ist auch leicht einzusehen, denn da $a = ee + 1$ und $n = 2e$, so ist $ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1$ welches das Quadrat ist von $2ee + 1$. Es sey z. E. $a = 17$ also daß $e = 4$, und da wird $17nn + 1 = mm$, wenn $n = 8$ und $m = 33$.

111.

Es sey endlich $a = ee + 2$, oder um 2 größer als eine Quadratzahl, also soll seyn $(ee + 2)\,nn + 1 = mm$, wo m offenbar größer ist als en, daher setze man $m = en + p$, so wird $eenn + 2nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp + pp - 1$ und daraus $n = \frac{ep + r\,(eepp + 2pp - 2)}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = ee + 1$. Dieses fällt auch sogleich in die Augen, denn da $a = ee + 2$ und $n = e$, so ist $ann + 1 = e^4 + 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee + 1$. Es sey z. E. $a = 11$ also daß $e = 3$, so wird seyn $11nn + 1 = mm$, wenn $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man setzen $a = 83$ so ist $e = 9$, und es wird $83nn + 1 = mm$, wenn man nimmt $n = 9$ und $m = 82$.

Tabelle

Tabelle

welche für einen jeglichen Werth von a die kleinste Zahlen m und n angiebt, also daß $mm = ann + 1$

a	n	m	a	n	m
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

a	n	m	a	n	m
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

Capi-

Capitel 8.

Von der Art diese Irrationalformel $r(a+bx+cxx+dx^3)$ rational zu machen.

112.

Wir schreiten hier fort zu einer Formel, da x zu der dritten Potestät ansteiget, um hernach bis zur vierten weiter zu gehen, ohngeacht diese beyde Fälle auf eine ähnliche Art behandelt werden müssen.

Es soll also diese Formel $a+bx+cxx+dx^3$ zu einem Quadrat gemacht, und zu diesem Ende geschickte Werthe für x in Rationalzahlen gesucht werden: denn da dieses schon weit größern Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst nur gebrochene Zahlen für x zu finden, und man ist genöthiget sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in ganzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus ist auch hier dieses zu merken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x zu erkennen, da hingegen die oben gebrauchte Methode auf einmal zu unendlich viel Auflösungen leitet.

113.

Da es unter der vorher abgehandelten Formel $a+bx+cxx$ unendlich viel Fälle giebt, da die Auflösung schlechterdings unmöglich ist, so findet solches vielmehr bey der gegenwärtigen Formel statt, wo nicht einmahl an eine Auflösung zu gedenken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen hat: daher

man

man blos allein für diese Fälle Regeln zu geben im Stande ist, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfündig machen kann, aus welcher nachgehends auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, also daß man solcher Gestalt immer weiter fortgehen kann.

Inzwischen geschieht es aber doch öfters, daß wenn gleich schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann. Also daß in solchen Fällen nur eine einzige statt findet, welcher Umstand besonders zu bemerken ist, weil in dem vorhergehenden Fall aus einer einzigen Auflösung unendlich viel neue gefunden werden können.

114.

Wenn also eine solche Formel $a + bx + cxx + dx3$ zu einem Quadrat gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall voraus gesetzt werden, wo dieses geschieht: ein solcher aber fällt am deutlichsten in die Augen, wenn das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel also heißt $ff + bx + cxx + dx^3$, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn man setzt $x = 0$.

Wir wollen also diese Formel zuerst vornehmen, und sehen wie aus dem bekannten Fall $x = 0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne, zu diesem Ende kann man zweyerley Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden besonders hier erklären wollen, und wobey es gut seyn wird mit besondern Fällen den Anfang zu machen.

115.

Es sey demnach diese Formel $1 + 2x - xx + x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier das erste Glied 1 ein Quadrat ist, so nehme man

die

die Wurzel von diesem Quadrat also an, daß die beyden ersten Glieder wegfallen. Es sey demnach die Quadratwurzel $1 + x$, davon das Quadrat unserer Formel gleich seyn soll, und da bekommen wir $1 + 2x - xx + x^3 = 1 + 2x + xx$, wo die beyden ersten Glieder einander aufheben, und diese Gleichung herauskommt $xx = -xx + x^3$ oder $x^3 = 2xx$, welche durch xx dividirt so gleich giebt $x = 2$, woraus unsere Formel wird $1 + 4 - 4 + 8 = 9$.

Gleichergestalt wenn diese Formel $4 + 6x - 5xx + 3x^3$ ein Quadrat werden soll, so setze man erstlich die Wurzel $= 2 + nx$, und suche n, also daß die beyden ersten Glieder wegfallen, weil nun wird $4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4nx + nn\,xx$, so muß seyn $4n = 6$, und also $n = \frac{3}{2}$, woher diese Gleichung entspringt $-5xx + 3x^3 = \frac{9}{4}xx$, oder $3x^3 = \frac{29}{4}xx$, daher $x = \frac{29}{12}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, dessen Wurzel seyn wird $2 + \frac{3}{2}x = \frac{45}{8}$.

116.

Der zweyte Weg bestehet darinn, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f + gx + hxx$, welche also beschaffen sind, daß in der Gleichung die drey ersten Glieder wegfallen:

Es sey z. E. diese Formel gegeben $1 - 4x + 6xx - 5x^3$, hiervon setze man die Wurzel $1 - 2x + hxx$, da denn seyn soll $1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx + 2hxx - 4hx^3 + hhx^4$; hier fallen die zwey ersten Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, so muß seyn $6 = 2h + 4$, und also $h = 1$, daraus bekommen wir $-5x^3 = -4x^3 + x^4$, wodurch x^3 dividirt wird; $-5 = -4 + x$ und $x = -1$.

117.

Diese zwey Methoden können also gebraucht werden, wenn das erste Glied a ein Quadrat ist Der Grund derselben beruhet darauf, daß man bey der ersten Methode der Wurzel zwey Glieder giebt, als f+px, wo f die Quadratwurzel des ersten Glieds ist, und p also angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfallen, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nämlich $cxx+dx^3$ mit $ppxx$ verglichen werden muß, da denn die Gleichung durch xx dividirt einen neuen Werth vor x angiebt, welcher seyn wird $x=\frac{pp-c}{d}$. Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder, und setzt dieselbe $f+px+qxx$, wenn nämlich $a=ff$, und bestimmt p und q dergestalt, daß die drey ersten Glieder beyderseits verschwinden, welches also geschiehet: Da

$$ff+bx+cxx+dx^3=ff+2fpx+2fqxx+ppxx+2pqx^3+qqx^4,$$

so muß seyn $b=2fp$ also $p=\frac{b}{2f}$

und $c=2fq+pp$ also $q=\frac{c-pp}{2f}$: und die übrige Gleichung $dx^3=2pqx^3+qqx^4$ läßt sich theilen, und wird daraus $x=\frac{d-2pq}{qq}$.

118.

Inzwischen kann es öfters geschehen, daß obgleich $a=ff$ dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angebe, wie aus dieser Formel $ff+dx^3$ zu ersehen, wo das zweyte und dritte Glied mangelt.

Denn

Denn setzt man nach der ersten, die Wurzel = f + px, also daß seyn soll $ff + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, so muß seyn $o = 2fp$ und $p = o$, daher bekommt man $dx^3 = o$, und daraus $x = o$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll $ff + dx^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^3 + qqx^4$, so
$+ ppxx$
muß seyn $o = 2fp$ und $p = o$, ferner $o = 2fq + pp$, und also $q = o$, daher man bekommt $dx^3 = o$ und wiederum $x = o$.

119.

In solchen Fällen ist nun nichts anders zu thun, als daß man sehe, ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, da man denn aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht wenn gleich das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dieses zu zeigen, so soll diese Formel $3 + x^3$ ein Quadrat seyn, da nun solches geschieht, wenn $x = 1$ so setze man $x = 1 + y$, und da bekommt man diese $4 + 3y + 3yy + y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2 + py$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + ppyy$; wo nun das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, und also $p = \frac{3}{4}$, alsdenn wird, $3 + y = pp$ und $y = pp - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = -\frac{39}{16}$, folglich $x = -\frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $= 2 + py + qyy$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + 4qyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo
$+ ppyy$

nun das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, oder $p = \frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen $3 = 4q + pp$, also $q = \frac{3 - pp}{4} = \frac{3}{6}\frac{9}{4}$; so haben wir $1 = 2pq + qqy$, und daraus $y = \frac{1 - 2pq}{qq}$, oder $y = \frac{3}{1}\frac{5}{3}\frac{2}{2}\frac{}{1}$, folglich $x = \frac{1}{1}\frac{8}{5}\frac{7}{2}\frac{3}{1}$.

120.

Nun wollen wir auch zeigen, wenn man schon einen solchen Werth gefunden hat, wie man daraus weiter einen andern neuen finden soll? Dieses wollen wir auf eine allgemeine Art vorstellen, und auf diese Formel anwenden $a + bx + cxx + dx^3$, von welcher schon bekannt sey, daß sie ein Quadrat werde wenn $x = f$, und daß alsdenn sey $a + bf + cff + df^3 = gg$. Hierauf setze man $x = f + y$, so erhält man diese neue Formel:

$$\begin{array}{l} a \\ +bf+by \\ +cff+2cfy+cyy \\ +df^3+3dffy+3dfyy+dy^3 \end{array}$$

$$gg + (b + 2cf + 3dff)y + (c + 3df)yy + dy^3$$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, also, daß die beyden obigen Methoden angewandt werden können; wodurch neue Werthe für y und also auch für x erhalten werden; nämlich $x = f + y$.

121.

Bisweilen hilft es aber auch nichts, wenn man gleich einen Werth für x errathen hat; wie in dieser Formel geschieht $1 + x^3$, welche ein Quadrat wird, wenn man setzt $x = 2$. Denn setzt man diesem zu folge $x = 2 + y$, so kommt diese Formel heraus $9 + 12y$

$+6$

$+ 6yy + y^3$, welche nun ein Quadrat seyn soll. Es sey davon nach der ersten Regel die Wurzel $= 3 + py$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + ppyy$; wo seyn muß $12 = 6p$ und $p = 2$; alsdenn wird $6 + y = pp = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werth nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qyy$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = q + 6py + 6qyy + 2pqy^3 + qqy^4 + ppyy$

wo seyn muß, erstlich $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + pp = 6q + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$; hieraus erhält man $1 = 2pq + qqy = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; daher $y = -3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem nichts weiter geschlossen werden kann: denn wollte man setzen $x = -1 + z$, so käme diese Formel $3z - 3zz + z^3$, wo das erste Glied gar wegfällt, und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß diese Formel $1 + x^3$ kein Quadrat werden könne außer diesen drey Fällen.

I.) $x = 2$, II.) $x = 0$, III.) $x = -1$,

welches aber auch aus andern Gründen bewiesen werden kann.

122.

Zur Uebung wollen wir noch diese Formel betrachten $1 + 3x^3$, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird I.) $x = 0$, II.) $x = 1$, III.) $x = 2$, und wir wollen sehen, ob wir noch andere solche Werthe finden können.

Da nun bekannt daß $x = 1$ ein Werth ist, so setze man $x = 1 + y$: und da bekommt man $1 + 3x^3 = 4 + 9y + 9yy + 3y^3$, davon sey die Wurzel $2 + py$,

also daß seyn soll $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$, wo seyn muß $9 = 4p$ und also $p = \frac{9}{4}$: die übrigen Glieder geben aber $9 + 3y = pp = \frac{21}{16}$ und $y = -\frac{21}{16}$; folglich $x = -\frac{5}{16}$, da denn $1 + 3x^3$ ein Quadrat wird, davon die Wurzel ist $-\frac{61}{64}$, oder auch $+\frac{61}{64}$: wollte man nun weiter setzen $x = -\frac{5}{16} + z$, so würde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweyten Methode die Wurzel setzen $2 + py + qyy$ also daß seyn soll $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + 4qyy + 2pqy^3 + qqy^4$, so müßte erstlich seyn

$+ ppyy$

$9 = 4p$, also $p = \frac{9}{4}$; hernach $9 = 4q + pp = 4q + \frac{81}{16}$, und also $q = \frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Gliedern wird $3 = 2pq + qqy = \frac{567}{128} + qqy$, oder $567 + 128qqy = 384$, oder $128qqy = -183$, das ist $126.\ \frac{63}{64}\ y = -183$, oder $42.\ \frac{63}{64}\ y = -61$, daher $y = -\frac{1952}{2709}$, folglich $x = -\frac{6229}{13545}$, aus welchem nach der obigen Anweisung wiederum andere neue gefunden werden können.

123.

Hier haben wir aus dem bekannten Fall $x = 1$ zwey neue Werthe heraus gebracht, aus welchen, wenn man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue gefunden werden könnten, wodurch man aber auf sehr weitläuftige Brüche gerathen würde.

Daher hat man Ursache sich zu verwundern, daß aus diesem Fall $x = 1$ nicht auch der andere $x = 2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, heraus gebracht worden; welches ohne Zweifel ein Zeichen ist, von der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode. Man kann gleichergestalt aus dem Fall $x = 2$ andere neue Werthe heraus bringen, man setze zu diesem Ende $x = 2 + y$, also daß diese Formel ein Quadrat seyn soll $25 + 36y + 18yy + 3y^3$; hiervon sey die Wur-

zel

zel nach der ersten Methode $5+py$, so wird $25+36y+18yy+3y^3=25+10py+ppyy$, und also $36=10p$ oder $p=\frac{18}{5}$; daraus wird aus den übrigen Gliedern durch yy dividirt, $18+3y=pp=\frac{324}{25}$, und daher $y=-\frac{42}{25}$, und $x=\frac{8}{25}$, daraus wird $1+3x^3$ ein Quadrat davon die Wurzel ist $5+py=-\frac{113}{25}$, oder $+\frac{113}{25}$.

Will man ferner nach der andern Methode die Wurzel setzen $5+py+qyy$, so wird $25+36y+18yy+3y^3=25+10py+10qyy+2pqy^3+ppyy+qqy^4$; wo um die zweyten und dritten Glieder wegzuschaffen seyn muß $36=10p$, oder $p=\frac{18}{5}$; hernach $18=10q+pp$, und $10q=18-\frac{324}{25}=\frac{126}{25}$, und $q=\frac{63}{125}$, die übrigen Glieder durch y^3 getheilt geben, $3=2pq+qqy$, oder $qqy=3-2pq=-\frac{39}{625}$; also $y=-\frac{3275}{1323}$, und $x=-\frac{6259}{13223}$.

124.

Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, wo aus einem andern Grund es ganz leicht ist so gar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bey dieser Formel geschieht $1-x-xx+x^3$, wo auf eine allgemeine Art genommen werden kann $x=nn-1$, und da n eine jegliche beliebige Zahl bedeutet.

Denn wenn $n=2$, so wird $x=3$, und unsere Formel $=1-3-9+27=16$. Nimmt man $n=3$, so wird $x=8$ und unsere Formel $=1-8-64+512=441$.

Es ereignet sich aber hier ein ganz besonderer Umstand, welchem wir diese leichte Auflösung zu danken haben, und welcher so gleich in die Augen fallen wird, wenn wir unsere Formel in Factores auflösen. Es ist aber leicht zu sehen, daß sich dieselbe durch $1-x$ theilen lasse und der Quotient seyn werde $1-xx$, welcher

weiter aus diesen Factoren besteht $(1+x)(1-x)$; also daß unsere Formel diese Gestalt erhält:
$1-x-xx+x^3=(1-x)(1+x)(1-x)=(1-x)^2.(1+x)$. Da nun dieselbe ein Quadrat seyn soll, und ein Quadrat durch ein Quadrat dividirt wieder ein Quadrat wird, so muß auch $1+x$ ein Quadrat seyn; und umgekehrt wenn $1+x$ ein Quadrat ist, so wird auch $(1-x)^2(1+x)$ ein Quadrat, man darf also nur setzen $1+x=nn$, so bekommt man so gleich $x=nn-1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerkt, so würde es schwer gefallen seyn, nach den obigen Methoden nur ein halb Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

125.

Bey einer jeden gegebenen Formel ist es demnach sehr gut dieselbe in Factores aufzulösen, wenn es nämlich möglich ist.

Wie dieses anzustellen sey, ist schon oben angezeigt worden: man setzt nämlich die gegebene Formel $=0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel, da denn eine jede Wurzel z. E. $x=f$, einen Factor $f-x$ dargiebt, welche Untersuchung um so viel leichter anzustellen ist, da hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler sind der bloßen Zahl.

126.

Dieser Umstand trifft auch ein bey unserer allgemeinen Formel $a+bx+cxx+dx^3$, wenn die zwey ersten Glieder wegfallen, also daß $cxx+dx^3$ ein Quadrat seyn soll: denn alsdenn muß auch nothwendig diese Formel durch das Quadrat xx dividirt, nämlich $c+dx$ ein Quadrat seyn, da man denn nur setzen darf $c+dx=nn$, um zu bekommen $x=\frac{nn-c}{d}$, welche

auf

auf einmal unendlich viele, und so gar alle mögliche Auflösungen in sich enthält.

127.

Wenn man bey dem Gebrauche der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wollte, um das zweyte Glied wegzuschaffen, so würde man auf eine andere irrationale Formel fallen, welche rational gemacht werden soll.

Es sey demnach die vorgegebene Formel $ff + bx + cxx + dx^3$, und man setze die Wurzel davon $= f + px$, so wird $ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt geben $b + cx + dxx = 2fp + ppx$, welches eine quadratische Gleichung ist, daraus x gefunden wird, wie folget

$$x = \frac{pp - c + r\,(p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd)}{2d}.$$

Anjetzo kommt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potestät der gesuchten Zahl p vorkommt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.

Capitel 9.

Von der Art diese irrational Formel $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}$ rational zu machen.

128.

Wir kommen nun zu solchen Formeln wo die unbestimmte Zahl x zur vierten Potestät ansteigt, womit wir zugleich unsere Untersuchung über die Quadratwurzelzeichen endigen müssen, indem man es bisher noch nicht so weit gebracht, daß man Formeln wo höhere Potestäten von x vorkommen zu Quadraten machen könnte.

Bey dieser Formel kommen aber drey Fälle in Betrachtung; davon der erste ist, wenn das erste Glied a ein Quadrat; der andere, wenn das letzte ex^4 ein Quadrat ist; der dritte Fall, wenn das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind, welche drey Fälle wir hier besonders abhandeln wollen.

129.

I.) Auflösung der Formel.

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}.$$

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist, so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel $= f + px$ setzen, und p so bestimmen, daß die beyden ersten Glieder wegfielen, und die übrigen sich durch xx theilen ließen; allein alsdenn würde in der Gleichung doch noch xx vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neues Wurzelzeichen erfordern. Man muß

also sogleich die zweyte Methode zur Hand nehmen und die Wurzel $= f + px + qxx$ setzen, hierauf die Buchstaben p und q so bestimmen, daß die drey ersten Glieder wegfallen, und also die übrigen durch x^3 theilbar werden, da denn nur eine einfache Gleichung heraus kömmt, aus welcher x ohne Wurzelzeichen bestimmt werden kann.

130.

Man setze daher die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll $ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4$
$= ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^3 + qqx^4$, wo die
$+ ppxx$
ersten Glieder von selbst wegfallen; für die zweyten setze man $b = 2fp$, oder $p = \frac{b}{2f}$, so muß für die dritten Glieder seyn $c = 2fq + pp$, oder $q = \frac{c - pp}{2f}$; ist dieses geschehen, so lassen sich die übrigen Glieder durch x^3 theilen und geben diese Gleichung $d + ex = 2pq + qqx$; woraus gefunden wird $x = \frac{d - 2pq}{qq - e}$, oder $x = \frac{2pq - d}{e - qq}$.

131.

Es ist aber leicht zu sehen, daß durch diese Methode nichts gefunden wird, wenn das zweyte und dritte Glied in der Formel mangelt, oder wenn sowohl $b = o$ als $c = o$, weil alsdenn $p = o$ und $q = o$; folglich $x = \frac{d}{-e}$, woraus aber gemeiniglich nichts neues gefunden werden kann, denn in diesem Fall wird offenbar $dx^3 + ex^4 = o$, und also unsere Formel dem Quadrate ff gleich. Insonderheit aber, wenn auch $d = o$, so kömmt $x = o$, welcher Werth nichts weiter hilft, daher diese Methode für solche Formel $ff + ex^4$ keine

Dienste

Dienste leistet. Eben dieser Umstand ereignet sich auch, wenn $b = o$ und $d = o$, oder wenn das zweyte und vierte Glied mangelt, und die Formel diese Gestalt hat $ff + cxx + ex^4$: denn da wird $p = o$ und $q = \frac{c}{2f}$, woraus gefunden wird $x = o$, welcher Werth so gleich in die Augen fällt und zu nichts weiter führet.

132.

II.) Auflösung der Formel

$$r\,(a + bx + cxx + dx^4 + ggx^4)$$

Diese Formel könnte so gleich auf den ersten Fall gebracht werden, indem man setzet $x = \frac{1}{y}$, denn weil alsdenn diese Formel $a + \frac{b}{y} + \frac{c}{yy} + \frac{d}{y^3} + \frac{gg}{y^4}$ ein Quadrat seyn müßte, so muß auch dieselbe mit dem Quadrate y^4 multiplicirt, ein Quadrat bleiben; alsdenn aber bekömmt man diese Formel $ay^4 + by^3 + cyy + dy + gg$, welche rückwärts geschrieben der obigen vollkommen ähnlich ist.

Man hat aber dieses nicht nöthig, sondern man kann die Wurzel davon also ansetzen $gxx + px + q$, oder umgekehrt $q + px + gxx$, da denn $a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + 2gqxx + 2gpx^3 + ggx^4$, weil sich nun hier $+ ppxx$ die fünften Glieder von selbst aufheben, so bestimme man erstlich p, also, daß sich auch die vierten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, hernach bestimme man weiter q, also, daß sich auch die dritten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn

$c = 2gq$

$c = 2gq + pp$, oder $q = \frac{c - pp}{2g}$: ist dieses geschehen, so geben die zwey ersten Glieder diese Gleichung $a + bx = qq + 2pqx$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{a - qq}{2pq - b}, \text{ oder } x = \frac{qq - a}{b - 2pq}.$$

133.

Hier ereignet sich wiederum der oben angeführte Mangel, wenn das zweyte und vierte Glied fehlet, oder wenn $b = 0$ und $d = 0$; denn da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2g}$, hieraus also $x = \frac{a - qq}{0}$, welcher Werth unendlich groß ist, und eben so wenig zu etwas führet als der Werth $x = 0$ im erstern Falle; daher diese Methode bey solchen Gleichungen $a + cxx + ggx^4$ gar nicht gebraucht werden kann.

134.

III.) Auflösung der Formel

$$r\,(ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)$$

Es ist klar, daß bey dieser Formel beyde obige Methoden angebracht werden können, denn da das erste Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel setzen $f + px + qxx$ und die drey ersten Glieder verschwinden machen; hernach weil das letzte Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel auch setzen $q + px + gxx$, und die drey letzten Glieder verschwinden machen, da man denn zwey Werthe für x heraus bringt.

Allein man kann auch diese Formel noch auf zwey andere Arten behandeln, die derselben eigen sind.

Nach der ersten Art setzet man die Wurzel $= f + px + gxx$, und bestimmt p also, daß die zweyten

Glieder

Glieder wegfallen, weil nämlich seyn soll: $ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = ff + 2fpx + 2fgxx + ppxx + 2gpx^3 + ggx^4$, so mache man $b = 2fp$ oder $p = \frac{b}{2f}$, und weil alsdenn nicht nur die ersten und letzten Glieder, sondern auch die zweyten sich einander aufheben, so geben die übrigen durch xx dividirt diese Gleichung $c + dx = 2fg + pp + 2gpx$, woraus gefunden wird $x = \frac{c-2fg-pp}{2gp-d}$, oder $x = \frac{pp+2fg-c}{d-2gp}$.

Hier ist insonderheit zu merken, daß da in der Formel nur das Quadrat gg vorkömmt, die Wurzel davon g sowohl negativ als positiv genommen werden kann; woraus man noch einen andern Werth für x erhält, nämlich $x = \frac{c+2fg-pp}{-2gp-d}$, oder $x = \frac{pp-2fg-c}{2gp+d}$.

135.

Es giebt auch noch einen andern Weg diese Formel aufzulösen: man setzet nämlich, wie vorhero die Wurzel $= f + px + gxx$, bestimmt aber p dergestalt, daß die vierten Glieder sich einander aufheben, nämlich man setzet in der obigen Gleichung $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, und weil auch das erste Glied mit dem letzten wegfällt, so geben die übrigen durch x dividirt diese einfache Gleichung $b + cx = 2fp + 2fgx + ppx$, woraus man findet $x = \frac{b-2fp}{2fg+pp-c}$; wobey zu merken, daß weil in der Formel nur das Quadrat ff vorkömmt, die Wurzel davon auch $-f$ gesetzt werden könne, also daß auch sein wird $x = \frac{b+2fp}{pp-2fg-c}$; also daß auch hieraus zwey neue

Werthe

Werthe für x gefunden werden, und folglich durch die bisher erklärte Methode in allem sechs neue Werthe heraus gebracht worden.

136.

Hier ereignet sich aber auch wiederum der verdrießliche Umstand, daß wenn das zweyte und vierte Glied mangelt, oder $b = o$ und $d = o$, kein tüchtiger Werth für x herausgebracht werden kann, und also die Auflösung dieser Formel $ff + cxx + ggx^4$ dadurch nicht erhalten werden kann. Denn weil $b = o$ und $d = o$, so hat man für die beyde Arten $p = o$, und daher giebt die erste $x = \frac{c - 2fg}{o}$, die andere Art aber $x = o$, aus welchen beyden nichts weiter gefunden werden kann.

137.

Dieses sind nun die drey Formeln, auf welche die bisher erklärten Methoden angewandt werden können, wenn aber in der gegebenen Formel weder das erste noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so ist nichts auszurichten, bis man einen solchen Werth für x errathen hat, durch welchen die Formel ein Quadrat wird. Laßt uns demnach setzen, man hätte schon gefunden, daß unsere Formel ein Quadrat werde, wenn man setzet $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 + eh^4 = kk$, so darf man nur setzen $x = h + y$, so bekömmt man eine neue Formel, in welcher das erste Glied seyn wird kk, und also ein Quadrat, daher der erste Fall gebraucht werden kann. Diese Verwandelung kann auch gebraucht werden, wenn man in den vorhergehenden Fällen schon einen Werth für x als z. E. $x = h$ gefunden hat, denn da darf man nur setzen $x = h + y$, so erhält man eine neue Gleichung, auf welche die obige Methode angewandt werden könne: da man denn aus dem schon gefundenen

Werthe

Werthe für x andere neue herausbringen kann, und mit diesem neuen kann man wieder auf gleiche Weise verfahren, und also immer mehr neue Werthe für x ausfündig machen.

138.

Insonderheit aber ist von den schon öfters gemeldeten Formeln, wo das zweyte und vierte Glied mangelt zu merken, daß keine Auflösung von denselben zu haben ist, wofern man nicht schon eine gleichsam errathen hat; wie aber alsdenn zu verfahren sey, wollen wir bey dieser Formel $a + ex^4$ zeigen, als welche sehr oft vorzukommen pfleget.

Wir wollen also setzen man habe schon einen Werth $x = h$ errathen, also daß da sey, $a + eh^4 = kk$, um nun daraus noch andere zu finden setze man $x = h + y$, so wird diese Formel ein Quadrat seyn müssen $a + eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$, das ist $kk + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$, welche zu der ersten Art gehöret; man setze daher die Quadratwurzel davon $k + py + qyy$ und folglich unsere Formel gleich diesem Quadrate $kk + 2kpy + 2kqyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo erstlich

$+ ppyy$

p und q so bestimmt werden müssen, daß auch die zweyten Glieder wegfallen, weswegen seyn muß $4eh^3 = 2kp$

und also $p = \frac{2eh^3}{k}$; ferner $6ehh = 2kq + pp$,

dahero $q = \frac{6ehh - pp}{2k}$, oder $q = \frac{3ehhkk - 2eeh6}{k^3}$, oder

$q = \frac{ehh(3kk - 2eh^4)}{k^3}$; folglich da $eh^4 = kk - a$, so wird

$q = \frac{ehh(kk + 2a)}{k^3}$; hernach geben die folgenden Glie-

der

der durch y^3 dividirt $4eh + ey = 2pq + qqy$, woraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$, wovon der Zähler in diese Form $\frac{4ehk^4 - 4eeh^5(kk+2a)}{k^4}$ gebracht wird, welche ferner da $eh^4 = kk - a$, in dieser verwandelt wird $\frac{4ehk^4 - 4eh(kk-a)(kk+2a)}{k^4}$, oder $\frac{4eh(-akk+a^2)}{k^4}$, oder $\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}$. Der Nenner aber $qq - e$ wird $= \frac{e(kk-a)(kk+2a)^2 - ek^6}{k^6}$, und dieses wird $= e\frac{(3ak^4 - 4a^3)}{k^6}$ $= \frac{ea(3k^4 - 4aa)}{k^6}$, woraus der gesuchte Werth seyn wird

$$y = \frac{2aeh(2a-kk)}{k^4} \cdot \frac{k^6}{ae(3k^4-4aa)}, \text{ das ist } y = \frac{2hkk(2a-kk)}{3k^4-3aa},$$

und daher $x = \frac{h(8akk-k^4-4aa)}{3k^4-4aa}$, oder $x = \frac{h(k^4-8akk+4aa)}{4aa-3k^4}$.

Setzt man nun diesen Werth für x, so wird unsere Formel, nämlich $a + ex^4$, ein Quadrat davon die Wurzel seyn wird $k + py + qyy$, so zu dieser Form gebracht wird: $k + \frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa} + \frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k^4-4aa)^2}$,

weil aus den obigen ist $p = \frac{2eh^3}{k}$, und $q = \frac{ehh(kk+2a)}{k^3}$,

und $y = \frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}$.

139.

Wir wollen bey dieser Formel $a + ex^4$ noch stehen bleiben, und weil der Fall $a + eh^4 = kk$ bekannt ist, so können wir denselben als zwey Fälle ansehen, weil sowohl $x = -h$ als $x = +h$, und deswegen können wir diese Formel in eine andere von der dritten Art

verwandeln, wo das erste und letzte Glied Quadrate werden. Solches geschieht, wenn wir setzen $x = \frac{h(1+y)}{1-y}$, welcher Kunstgriff öfters gute Dienste thut, also wird unsere Formel: $\frac{a(1-y)^4 + eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4}$,

oder $\frac{kk + 4(kk-2a)y + 6kkyy + 4(kk-2a)y^3 + kky^4}{(1-y)^4}$:

hiervon setze man die Quadratwurzel nach den dritten Fall $\frac{k + py - kyy}{(1-y)^2}$, also daß der Zähler unserer Formel gleich seyn muß diesem Quadrate $kk + 2kpy - 2kkyy + ppyy - 2kpy^3 + kky^4$. Man mache, daß die zweyten Glieder wegfallen, welches geschieht, wenn $4kk - 8a = 2kp$, oder $p = \frac{2kk-4a}{k}$: die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $6kk + 4(kk - 2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, oder $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$, da nun $p = \frac{2kk-4a}{k}$, und $pk = 2kk - 4a$,

so wird $y(8kk - 16a) = \frac{-4k^4 - 16akk + 16aa}{kk}$;

folglich $y = \frac{-k^4 - 4akk + 4aa}{kk(2kk-4a)}$;

um nun daraus x zu finden, so ist erstlich

$1 + y = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{kk(2kk-4a)}$, und denn zweytens

$1 - y = \frac{3k^4 - 4aa}{kk(2kk-4a)}$; also

$\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}$; folglich bekommen wir

x =

$x = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}$. h, welches aber der nämliche Ausdruck ist, den wir schon vorher gefunden haben.

140.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Formel gegeben $2x^4 - 1$, welche ein Quadrat seyn soll. Hier ist nun $a = -1$ und $e = 2$, der bekannte Fall aber, wo diese Formel ein Quadrat wird, ist, wenn $x = 1$: also ist $h = 1$ und $kk = 1$, das ist $k = 1$: hieraus erhalten wir also sogleich diesen neuen Werth $x = \frac{1+3+4}{3-4} = -13$, weil aber von x nur die vierte Potestät vorkömmt, so kann man auch setzen $x = +13$, und daraus wird $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Nehmen wir nun diesen Fall als bekannt an, so wird $h = 13$ und $k = 239$, woraus wieder ein neuer Werth für x gefunden wird, nämlich

$x = \frac{815730721 + 228488 + 4}{2447192163 - 4} . 13 = \frac{815959213}{2447192159} . 13$, also wird $x = \frac{10607469769}{2447192159}$.

141.

Auf gleiche Weise wollen wir die etwas allgemeinere Formel $a + cxx + ex^4$ betrachten, und für den bekannten Fall, da dieselbe ein Quadrat wird, annehmen $x = h$, also daß $a + chh + eh^4 = kk$. Um nun daraus andere zu finden, so setze man $x = h + y$, da denn unsere Formel diese Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ chh + 2chy + cyy \\ \underline{eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4} \\ kk + (2ch + 4eh^3)\,y + (c + 6ehh)\,yy + 4ehy^3 + ey^4 \end{array}$$

wo das erste Glied ein Quadrat ist: man setze dem-

nach die Quadratwurzel davon $k + py + qyy$, also daß unsere Formel diesem Quadrate gleich seyn soll $kk + 2kpy + 2kqyy + 2pqy^3 + qqy^4$: nun bestimme man p und q also daß die zweyten und dritten Glieder wegfallen, worzu erfordert wird, erstlich daß $2ch + 4eh^3 = 2kp$ oder $p = \frac{ch + 2eh^3}{k}$, hernach aber daß $c + 6ehh = 2kq + pp$, oder $q = \frac{c + 6ehh - pp}{2k}$: alsdenn geben die folgende Glieder durch y^3 dividirt diese Gleichung $4eh + ey = 2pq + qqy$, daraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$, und daraus ferner $x = h + y$; in welchem Falle die Quadratwurzel aus unserer Formel seyn wird $k + py + qyy$. Sieht man nun dieses wieder als den anfänglich bekannten Fall an, so findet man daraus wieder einen neuen Fall, und kann demnach solcher Gestalt so weit fortgehen als man will.

142.

Um dieses zu erläutern, so sey die gegebene Formel $1 - xx + x^4$, wo folglich $a = 1$, $c = -1$ und $e = 1$. Der bekannte Fall fällt so gleich in die Augen nämlich $x = 1$, also daß $h = 1$ und $k = 1$. Setzet man nun $x = 1 + y$, und die Quadratwurzel unserer Formel $= 1 + py + qyy$, so muß erstlich seyn $p = 1$ und hernach $q = 2$; hieraus wird gefunden $y = 0$ und $x = 1$, welches eben der schon bekannte Fall ist, und also kein neuer gefunden worden. Man kann aber aus andern Gründen beweisen, daß diese Formel kein Quadrat seyn kann, außer in den Fällen $x = 0$ und $x = \pm 1$.

143.

Es sey ferner diese Formel zum Exempel gegeben $2 - 3xx + 2x^4$ wo $a = 2$, $c = -3$ und $e = 2$. Der bekannte Fall giebt sich auch sogleich, nämlich $x = 1$: es sey demnach $h = 1$, so wird $k = 1$; setzt man nun $x = 1 + y$ und die Quadratwurzel $1 + py + qyy$, so wird $p = 1$ und $q = 4$, daraus erhalten wir $y = 0$ und $x = 1$, woraus wieder nichts neues gefunden wird.

144.

Ein anderes Exempel sey diese Formel $1 + 8xx + x^4$, wo $a = 1$, $c = 8$ und $e = 1$. Nach einer geringen Betrachtung ergiebt sich der Fall $x = 2$; denn nimmt man $h = 2$ so wird $k = 7$, setzt man nun $x = 2 + y$, und die Wurzel $7 + py + qyy$, so muß seyn $p = \frac{3}{7}^2$, und $q = \frac{2}{3}\frac{7}{4}\frac{2}{3}$; hieraus erhalten wir $y = -\frac{5}{2}\frac{8}{9}\frac{8}{1}\frac{0}{1}$ und $x = -\frac{5}{2}\frac{8}{9}\frac{8}{1}\frac{}{1}$, wo das Zeichen minus weggelassen werden kann. Bey diesem Exempel aber ist zu merken, daß weil das letzte Glied schon vor sich ein Quadrat ist, und also auch in der neuen Formel ein Quadrat bleiben muß, die Wurzel auch noch anders nach dem obigen dritten Fall angenommen werden kann.

Es sey demnach wie vorher $x = 2 + y$ so bekommen wir,

1

$32 + 32y + 8yy$

$16 + 32y + 24yy + 8y^3 + y^4$

$49 + 64y + 32yy + 8y^3 + y^4$

welche jetzt auf mehrerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann; denn erstlich kann man die Wurzel $7 + py + yy$ setzen, also daß unsere Formel diesem Quadrat gleich seyn soll $49 + 14py + 14yy + ppyy + 2py^3 + y^4$; nun kann man die letzt ohn eine Glieder verschwinden machen, wenn man setzt $2p = 8$, oder $p = 4$;

$p = 4$; da denn die übrigen durch y dividirt geben $64 + 32y = 14p + 14y + ppy = 56 + 30y$, und daher $y = -4$ und $x = -2$, oder $x = +2$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Nimmt man aber p so an, daß die zweyten Glieder wegfallen, so wird $14p = 64$ und $p = \frac{32}{7}$; da denn die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $14 + pp + 2py = 32 + 8y$, oder $1\frac{10}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$, und daher $y = -\frac{15}{28}$, folglich $x = -\frac{15}{28}$, oder $x = +\frac{15}{28}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, davon die Wurzel ist $1\frac{41}{784}$. Da auch $-yy$ die Wurzel ist des letzten Glieds, so kann man die Quadratwurzel davon also setzen $7 + py - yy$, oder die Formel selbst diesem Quadrat gleich $49 + 14py - 14yy - 2py^3 + y^4 + ppyy$

Um nun die letzt ohn eine Glieder wegzubringen setze man $8 = -2p$, oder $p = -4$, so geben die übrigen durch y dividirt $64 + 32y = 14p - 14y + ppy = -56 + 2y$, daraus wird $y = -4$ wie oben.

Läßt man aber die zweyten Glieder verschwinden, so wird $64 = 14p$ und $p = \frac{32}{7}$: die übrigen aber durch yy dividirt geben $32 + 8y = -14 + pp - 2py$, oder $32 + 8y = \frac{338}{49} - \frac{64}{7}y$, daraus wird $y = -\frac{15}{28}$ und $x = \mp\frac{15}{28}$, welcher mit dem obigen einerley ist.

145.

Eben so kann man verfahren mit der allgemeinen Formel $a + bx + cxx + dx^3 + ex^4$, wenn ein Fall, nämlich $x = h$, bekannt ist, da dieselbe ein Quadrat nämlich kk, wird: denn alsdenn setze man $x = h + y$, so erhält man eine Formel von eben so viel Gliedern davon das erste seyn wird kk; wird nun die Wurzel davon gesetzt $k + py + qyy$, und man bestimmt p und q dergestalt daß auch die zweyten und dritten Glieder wegfallen, so geben die beyden letzten durch y^3 dividirt

vidirt eine einfache Gleichung, woraus y und folglich auch x bestimmt werden kann.

Nur fallen hier solche Fälle weg, wo der neu gefundene Werth von x mit dem bekannten $x = h$ einerley ist, weil alsdenn nichts neues gefunden wird. In solchen Fällen ist entweder die Formel an sich selbst unmöglich, oder man müßte noch einen andern Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird.

146.

Nur so weit ist man bisher gekommen in Auflösung der Quadratwurzelzeichen, da nämlich die höchste Potestät hinter denselben die vierte nicht übersteiget. Sollte demnach in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potestät von x vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht hinlänglich eine Auflösung davon zu geben, wenn auch gleich schon ein Fall bekannt wäre. Um dieses deutlicher zu zeigen so betrachte man diese Formel $kk + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist, wollte man nun die Wurzel davon wie vorher setzen $k + px + qxx$ und p und q so bestimmen, daß die zweyten und dritten Glieder wegfielen, so blieben doch noch drey übrig, welche durch x^3 dividirt eine quadratische Gleichung geben würden, woraus x durch ein neues Wurzelzeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel setzen $k + px + qxx + rx^3$ so würde das Quadrat bis zur sechsten Potestät aufsteigen, also daß wenn gleich p, q, und r so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potestät übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzelzeichen aufgelöst werden könnte. Daher wir genöthiget sind

hiemit die Formeln die ein Quadrat seyn sollen zu verlassen. Wir wollen demnach zu den cubischen Wurzelzeichen fort schreiten.

Capitel 10.

Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt[3]{(a + bx + cxx + dx^3)}$ rational zu machen.

147.

Hier werden also solche Werthe für x erfordert daß diese Formel $a + bx + cxx + dx^3$ eine Cubiczahl werde, und daraus also die Cubicwurzel gezogen werden könne. Hiebey ist zu erinnern daß diese Formel die dritte Potestät nicht überschreiten müsse, weil sonst die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potestät gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden: fielen aber die zwey letzten Glieder weg, also daß diese Formel $a + bx$ zu einem Cubo gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur setzen dürfte $a + bx = p^3$, und daraus sogleich gefunden würde $x = \frac{p^3 - a}{b}$.

148.

Hier ist wiederum vor allen Dingen zu merken, daß wenn weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu gedenken sey, wofern nicht schon ein Fall darinn die Formel ein Quadrat

wird

wird bekannt ist, derselbe mag nun sogleich in die Augen fallen, oder erst durch probiren gefunden werden müssen.

Das erstere geschieht nun, erstlich wenn das erste Glied ein Cubus ist und die Formel $f^3 + bx + cxx + dx^3$, wo der bekannte Fall ist $x = o$; hernach auch wenn das letzte Glied ein Cubus und die Formel also beschaffen ist $a + bx + cxx + g^3x^3$; aus diesen beyden Fällen entspringt der dritte wo sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drey Fälle wir hier erwegen wollen.

149.

I. Fall. Es sey die vorgegebene Formel $f^3 + bx + cxx + dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze demnach die Wurzel davon $f + px$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich seyn soll $f^3 + 3ffpx + 3fppxx + p^3x^3$: da nun die ersten Glieder von selbst wegfallen, so bestimme man p dergestalt daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wenn $b = 3ffp$, oder $p = \frac{b}{3ff}$; alsdenn geben die übrigen Glieder durch xx dividirt diese Gleichung $c + dx = 3fpp + p^3x$, woraus gefunden wird $x = \frac{c-3fpp}{p^3-d}$. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, so könnte man die Cubicwurzel schlecht weg setzen $= f$, da man denn bekommen würde $f^3 = f^3 + bx + cxx$: oder $b + cx = o$ und daraus $x = -\frac{b}{c}$, woraus aber nichts weiter geschlossen werden könnte.

150.

II. Fall. Die vorgegebene Formel habe nun zweytens diese Gestalt $a + bx + cxx + g^3x^3$, man setze

die Cubicwurzel $p + gx$, davon der Cubus ist $p^3 + 3gppx + 3ggpxx + g^3x^3$, da sich denn die letzten Glieder aufheben; nun bestimme man p also daß auch die letzten ohne eins wegfallen, welches geschieht wenn $c = 3ggp$ oder $p = \frac{c}{3gg}$: alsdenn geben die zwey ersten diese Gleichung $a + bx = p^3 + 3gppx$, woraus gefunden wird $x = \frac{a - p^3}{3gpp - b}$. Wäre das erste Glied a nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubicwurzel auch schlechtweg setzen können $= gx$, da denn $g^3x^3 = bx + cxx + g^3x^3$ oder $o = b + cx$, folglich $x = -\frac{b}{c}$; welches aber gemeiniglich zu nichts dienet.

151.

III. Fall. Es sey endlich drittens die vorgegebene Formel $f^3 + bx + cxx + g^3x^3$, worinn sowohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; daher dieselbe auf beyde vorhergehende Arten tractirt und also zwey Werthe für x heraus gebracht werden können.

Außer diesen aber kann man auch noch die Wurzel setzen $f + gx$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich werden soll $f^3 + 3ffgx + 3fggxx + g^3x^3$, da denn die ersten und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber durch x dividirt diese Gleichung geben $b + cx = 3ffg + 3fggx$, und daraus $x = \frac{h - 3ffg}{3fgg - c}$.

152.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drey Arten, so ist dabey nichts anders zu thun, als daß man suche einen Werth zu errathen, da dieselbe ein Cubus wird: hat man einen solchen gefunden welcher sey $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 = k^3$,

so

so setze man $x = h + y$, da denn unsere Formel diese Gestalt bekommen wird.

$$\begin{array}{l} a \\ bh + by \\ chh + 2chy + cyy \\ dh^3 + 3dhhy + 3dhyy + dy^3 \end{array}$$

$$k^3 + (b + 2ch + 3dhh)\,y + (c + 3dh)\,yy + dy^3$$

welche zu der ersten Art gehört, und also für y ein Werth gefunden werden kann, woraus man denn einen neuen Werth für x erhält, aus welchem nachgehends auf gleiche Weise noch mehr gefunden werden können.

153.

Wir wollen nun diese Methode durch einige Exempel erläutern und erstlich diese Formel $1 + x + xx$ vornehmen, welche ein Cubus seyn soll, und zur ersten Art gehöret. Man könnte also sogleich die Cubicwurzel $= 1$ setzen, daraus gefunden würde $x + xx = 0$, das ist $x\,(1 + x) = 0$; folglich entweder $x = 0$ oder $x = -1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze daher die Cubicwurzel $1 + px$, wovon der Cubus ist $1 + 3px + 3ppxx + p^3x^3$, und mache $1 = 3p$ oder $p = \frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch xx dividirt $1 = 3pp + p^3x$, oder $x = \frac{1 - 3pp}{p^3}$: da nun $p = \frac{1}{3}$, so wird $x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}} = 18$, und daher unsere Formel $1 + 18 + 324 = 343$ wovon die Cubicwurzel ist $1 + px = 7$. Wollte man nun weiter setzen $x = 18 + y$, so würde unsere Formel diese Gestalt bekommen $343 + 37y + yy$, wovon nach der ersten Regel die Cubicwurzel zu setzen wäre $7 + py$, wovon der Cubus ist $343 + 147py + 21ppyy + p^3y^3$: nun setze man $37 = 147p$, oder $p = \frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder diese Gleichung $1 = 21pp + p^3y$.

$+ p^3 y$, also $y = \frac{1-21pp}{p^3}$, das ist $y = \frac{340.121.147}{37^3}$ $= -\frac{1}{5}\frac{0}{0}\frac{4}{0}\frac{9}{0}\frac{5}{5}\frac{8}{3}\frac{0}{}$, woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

154.

Es sey ferner diese Formel gegeben $2 + xx$, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden da dieses geschieht, welcher ist $x = 5$: man setze demnach sogleich $x = 5 + y$, so bekommt man $27 + 10y + yy$; davon sey die Cubicwurzel $3 + py$, und also die Formel selbst diesem Cubo $27 + 27py + 9ppyy + p^3y^3$ gleich; man mache $10 = 27p$, oder $p = \frac{1}{2}\frac{0}{7}$, so bekommt man $1 = 9pp + p^3y$, und daraus $y = \frac{1-9pp}{p^3}$, das ist $y = -\frac{10.9.27}{1000}$ oder $y = -\frac{4}{1}\frac{6}{0}\frac{1}{0}\frac{7}{0}\frac{}{1}$, und $x = \frac{3}{1}\frac{8}{0}\frac{3}{0}\frac{}{0}$: hieraus wird unsere Formel $2 + xx = \frac{2}{1}\frac{1}{0}\frac{4}{0}\frac{6}{0}\frac{6}{0}\frac{8}{0}\frac{9}{0}$, wovon die Cubicwurzel seyn muß $3 + py = \frac{1}{1}\frac{2}{0}\frac{9}{0}$.

155.

Man betrachte ferner diese Formel $1 + x^3$, ob dieselbe ein Cubus werden könne, außer den zwey offenbaren Fällen $x = 0$ und $x = -1$? Ob nun gleich diese Formel zum dritten Fall gehöret, so hilft uns doch die Wurzel $1 + x$ nichts, weil der Cubus davon $1 + 3x + 3xx + x^3$ unserer Formel gleich gesetzt $3x + 3xx = 0$ oder $x(1 + x) = 0$ giebt, das ist entweder $x = 0$ oder $x = -1$.

Will man ferner setzen $x = -1 + y$, so bekommen wir diese Formel $3y - 3yy + y^3$, welche ein Cubus seyn soll und zum zweyten Fall gehöret: setzt man daher die Cubicwurzel $p + y$ wovon der Cubus ist

$p^3 + 3ppy$

$p^3 + 3ppy + 3pyy + y^3$, und macht $-3 = 3p$ oder $p = -1$, so geben die übrigen $3y = p^3 + 3ppy = -1 + 3y$, folglich $y = \frac{1}{0}$ das ist unendlich; woraus also nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe vergebens um noch andere Werthe für x zu finden, weil man aus andern Gründen beweisen kann daß diese Formel $1 + x^3$ außer den gemeldten Fällen, nimmer ein Cubus werden kann; denn man hat gezeiget daß die Summe von zweyen Cubis als $t^3 + x^3$ niemals ein Cubus werden kann, daher ist es auch nicht möglich in dem Fall $t = 1$.

156.

Man behauptet auch daß $2 + x^3$ kein Cubus werden könne außer dem Fall $x = -1$: diese Formel gehört zwar zu dem zweyten Fall, es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts heraus gebracht, weil die mittlern Glieder fehlen. Setzt man aber $x = -1 + y$, so bekommt man diese Formel $1 + 3y - 3yy + y^3$, welche nach allen drey Fällen tractirt werden kann. Setzt man nach den ersten die Wurzel $1 + y$, davon der Cubus $1 + 3y + 3yy + y^3$ ist, so wird $-3yy = 3yy$, welches nur geschieht wenn $y = 0$. Setzt man nach den zweyten Fall die Wurzel $-1 + y$, wovon der Cubus $-1 + 3y - 3yy + y^3$, so wird $1 + 3y = -1 + 3y$ und $y = \frac{2}{0}$, welches unendlich ist. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel setzen $1 + y$ welches schon geschehen.

157.

Es sey diese Formel gegeben $3 + 3x^3$ welche ein Cubus werden soll; dieses geschieht nun erstlich in dem Fall $x = -1$, woraus aber nichts geschlossen werden kann, hernach aber auch in dem Fall $x = 2$: man setze deswegen $x = 2 + y$, so kommt diese Formel heraus

$27 + 36y$

$27 + 36y + 18yy + 3y^3$, welche zum ersten Fall gehöret, daher sey die Wurzel $3 + py$, wovon der Cubus $27 + 27py + 9ppyy + p^3y^3$; man mache also $36 = 27p$, oder $p = \frac{4}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch yy dividirt, $18 + 3y = 9pp + p^3y = 16 + \frac{6}{7}\frac{4}{7}y$, oder $\frac{1}{2}\frac{7}{7}y = -2$, daher $y = -\frac{5}{1}\frac{4}{7}$, folglich $x = -\frac{2}{1}\frac{0}{7}$; hieraus wird unsere Formel $3 + 3x^3 = -\frac{9}{4}\frac{2}{9}\frac{6}{1}\frac{1}{3}$, wovon die Cubicwurzel ist $3 + py = \frac{2}{1}\frac{1}{7}$; und aus diesem Werth könnte man noch mehrere finden, wenn man wollte.

158.

Wir wollen zuletzt noch diese Formel betrachten, $4 + xx$, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus wird, nämlich, wenn $x = 2$ und $x = 11$. Setzt man nun erstlich $x = 2 + y$, so muß diese Formel ein Cubus seyn $8 + 4y + yy$, dessen Wurzel sey $2 + \frac{1}{3}y$, und also die Formel $= 8 + 4y + \frac{2}{3}yy + \frac{1}{2}\frac{1}{7}y^3$, woraus man erhält $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{7}y$, daher $y = 9$ und $x = 11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x = 11 + y$, so bekommt man $125 + 22y + yy$, so dem Cubo von $5 + py$, das ist, $125 + 75py + 15ppyy + p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p = \frac{2}{7}\frac{2}{5}$ genommen, giebt $1 = 15pp + p^3y^3$, oder $p^3y^3 = 1 - 15pp = -\frac{1}{3}\frac{0}{7}\frac{9}{5}$; daher $y = -\frac{1}{1}\frac{2}{0}\frac{2}{6}\frac{6}{4}\frac{2}{8}\frac{5}{}$, und also $x = -\frac{5}{1}\frac{4}{0}\frac{9}{6}\frac{7}{4}\frac{}{8}$.

Weil x sowohl negativ als positiv seyn kann, so setze man $x = \frac{2+2y}{1-y}$, so wird unsere Formel $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, welche ein Cubus seyn soll; man multiplicire also oben und unten mit $1-y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und da bekommt man $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, wo also nur noch der Zähler $8-8y+8yy-8y^3$, oder eben derselbe durch 8 dividirt, nämlich $1-y+yy-y^3$ zu einem

Cubo

Cubo gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, wovon der Cubus ist $1 - y + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{27}y^3$, so wird $1 - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}y$, oder $27 - 27y = 9 - y$, daher $y = \frac{9}{13}$, folglich $1 + y = \frac{22}{13}$, und $1 - y = \frac{4}{13}$, folglich $x = 11$ wie vorher.

Nach der andern Art, wenn man die Wurzel setzen wollte $\frac{1}{3} - y$, findet man ebendasselbe.

Nach der dritten Art, wenn man die Wurzel setzt $1 - y$, wovon der Cubus ist $1 - 3y + 3yy - y^3$, bekommt man $-1 + y = -3 + 3y$, und also $y = 1$, folglich $x = \frac{4}{0}$, das ist unendlich; daher wird auf diese Art nichts neues gefunden.

159.

Weil wir aber diese zwey Fälle schon wissen, $x = 2$ und $x = 11$, so kann man setzen $x = \frac{2 + 11y}{1 \pm y}$: denn ist $y = 0$, so wird $x = 2$, ist aber y unendlich groß, so wird $x = \pm 11$.

Es sey demnach erstlich $x = \frac{2 + 11y}{1 + y}$, so wird unsere Formel $4 + \frac{4 + 44y + 121yy}{1 + 2y + yy}$, oder $\frac{8 + 52y + 125yy}{(1 + y)^2}$; man multiplicire oben und unten mit $1 + y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zähler, welcher seyn wird $8 + 60y + 177yy + 125y^3$, zu einem Cubo gemacht werden soll.

Man setze demnach erstlich die Wurzel $= 2 + 5y$, hierdurch würden nicht nur die zwey ersten Glieder, sondern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze demnach nach der zweyten Art die Wurzel $p + 5y$, davon der Cubus $p^3 + 15ppy + 75pyy$

+

$+125y^3$, und mache $177=75p$, oder $p=\frac{59}{25}$, so wird $8+60y=p^3+15ppy$, daher $-\frac{2943}{125}y=\frac{80379}{125}$, und $y=\frac{80379}{3678}$, woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch setzen $x=\frac{2+11y}{1-y}$, und da wird unsere Formel $4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2}$, wovon der Zähler mit $1-y$ multiplicirt, ein Cubus wird. Also muß auch $8+28y+89yy-125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $=2+\frac{7}{3}y$, davon der Cubus ist $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{343}{27}y^4$, so wird $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{343}{27}y$, oder $\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$, und also $y=\frac{1521}{378}=\frac{9}{22}$; folglich $x=11$, welches der schon bekannte Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2-5y$, wovon der Cubus ist $8-60y+150yy-125y^3$, so erhalten wir $28+89y=-60+150y$, folglich $y=\frac{88}{61}$, woraus gefunden wird $x=-\frac{1090}{27}$, und unsere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus ist von $\frac{106}{9}$.

160.

Dieses sind nun die bisher bekannten Methoden, wodurch eine solche Formel, entweder zu einem Quadrat, oder zu einem Cubo gemacht werden kann, wenn nur in jenem Fall die höchste Potestät der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in letzterm aber den dritten nicht übersteiget.

Man könnte noch den Fall hinzu fügen, da eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potestät die zweyte nicht übersteigen muß. Wenn aber eine solche Formel $a+bx+cxx$ ein Biquadrat seyn soll, so muß dieselbe vor allen Dingen zu einem Quadrat gemacht wer-

den,

den, da denn nur noch übrig ist, daß die Wurzel von diesem Quadrat noch ferner zu einem Quadrat gemacht werde, wozu die Regel schon oben gegeben worden. Also, wenn z. E. $xx+7$ ein Biquadrat seyn soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrat, welches geschieht, wenn $x=\frac{7pp-qq}{2pq}$, oder auch $x=\frac{qq-7pp}{2pq}$; alsdenn wird unsere Formel gleich diesem Quadrat $\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq}$, wovon die Wurzel ist $\frac{7pp+qq}{2pq}$, welche noch zu einem Quadrat gemacht werden muß: man multiplicire demnach oben und unten mit $2pq$, damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdenn wird der Zähler $2pq(7pp+qq)$ ein Quadrat seyn müssen, welches nicht anders geschehen kann, als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu diesem Ende setzen $q=pz$, damit diese Formel $2ppz(7pp+ppzz)=2p^4z(7+zz)$, und also auch durch p^4 dividirt, nämlich diese $2z(7+zz)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z=1$, daher setze man $z=1+y$, so bekommen wir $(2+2y)(8+2y+yy)=16+20y+6yy+2y^3$, wovon die Wurzel sey $4+\frac{5}{2}y$, davon das Quadrat $16+20y+\frac{25}{4}yy$, und unserer Formel gleich gesetzt, giebt $6+2y=\frac{25}{4}$, $y=\frac{1}{8}$, und $z=\frac{9}{8}$: da nun $z=\frac{q}{p}$, so wird $q=9$ und $p=8$, daher $x=\frac{367}{44}$, daraus wird unsere Formel $7+xx=\frac{2179841}{207335}$, davon erstlich die Quadratwurzel ist $\frac{529}{144}$, und hiervon nochmals die Quadratwurzel $\frac{23}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln gebe, welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubo gemacht werden können: denn wenn z. E. cxx ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon = px, und da wird $cxx = p^3x^3$, oder $c = p^3x$, daher $x = \frac{c}{p^3}$: man schreibe $\frac{1}{q}$ anstatt p, so wird $x = cq^3$.

Der Grund hiervon ist offenbar, weil die Formel ein Quadrat enthält, daher auch alle dergleichen Formeln $a(b+cx)^2$, oder $abb + 2abcx + accxx$ ganz leicht zu einem Cubo gemacht werden können; denn man setze die Cubicwurzel davon $= \frac{b+cx}{q}$, so wird $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt, giebt $a = \frac{b+cx}{q^3}$, daraus $x = \frac{aq^3-b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellet, wie höchst nützlich es sey, die vorgegebene Formel in ihre Factores aufzulösen, so oft solches geschehen kann, und von dieser Materie soll weitläuftig in dem folgenden Capitel gehandelt werden.

Capitel

Capitel II.

Von der Auflösung dieser Formel axx + bxy + cyy in Factoren.

162.

Hier bedeuten die Buchstaben x und y nur allein ganze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisherigen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte, gesehen, wie die Frage immer auf ganze Zahlen gebracht werden kann. Denn ist z. E. die gesuchte Zahl x ein Bruch, so darf man nur setzen $x = \frac{t}{u}$, da denn für t und u immer ganze Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beyden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel sind also x und y nur ganze Zahlen, und ehe wir zeigen können, wie dieselbe zu einem Quadrat, oder Cubo, oder einer noch höheren Potestät gemacht werden soll, so ist nöthig, zu untersuchen, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben soll, daß diese Formel zwey oder mehr Factores erhalte.

163.

Hier kommen nun drey Fälle zu betrachten vor: der erste ist, wenn sich diese Formel wirklich in zwey rationale Factores auflösen läßt, welches geschieht, wie

wir schon oben gesehen haben, wenn $bb - 4ac$ eine Quadratzahl wird.

Der andere Fall ist, wenn diese beyde Factores einander gleich werden, in welchem die Formel selbst ein wirkliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall ist, wenn sich dieselbe nicht anders als in irrationale Factores auflösen läßt, dieselben mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär seyn; jenes geschieht, wenn $bb - 4ac$ eine positive Zahl aber kein Quadrat ist, dieses aber, wenn $bb - 4ac$ negativ wird. Dieses sind nun die drey Fälle, welche wir hier zu erwägen haben.

164.

Läßt sich unsere Formel in zwey rationale Factores auflösen, so kann dieselbe also vorgestellt werden $(fx+gy)(hx+ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwey Factores in sich schließt. Will man aber, daß dieselbe auf eine allgemeine Art mehr Factores in sich schließe, so darf man nur setzen $fx+gy=pq$ und $hx+ky=rs$, da denn unsere Formel diesem Product $pqrs$ gleich wird, und also vier Factores in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehret werden könnte: hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth, nämlich $x=\frac{pq-gy}{f}$ und $x=\frac{rs-ky}{h}$, woraus gefunden wird $hpq-hgy=frs-fky$, und also $y=\frac{frs-hqp}{fk-hg}$ und $x=\frac{kpq-grs}{fk-hg}$; damit nun x und y in ganzen Zahlen ausgedrückt werde, so müssen die Buchstaben p, q, r, s, also angenommen werden, daß sich der Zähler durch den Nenner wirklich theilen lasse, welches geschieht, wenn sich entweder p und r, oder q und s dadurch theilen lassen.

165.

165.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Formel vorgegeben $xx - yy$, welche aus diesen Factoren besteht $(x+y)(x-y)$: soll dieselbe nun noch mehr Factoren haben, so setze man $x+y=pq$ und $x-y=rs$, so bekommt man $x=\frac{pq+rs}{2}$ und $y=\frac{pq-rs}{2}$; damit nun diese Zahlen ganz werden, so müssen die beyden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerade seyn, oder beyde ungerade.

Es sey z. E. $p=7$, $q=5$, $r=3$ und $s=1$, so wird $pq=35$ und $rs=3$, folglich $x=19$ und $y=16$: daher entspringt $xx-yy=105$, welche Zahl wirklich aus den Factoren 7. 5. 3. 1. besteht: also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

166.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Factores in sich schließt, und demnach also vorgestellet werden kann $(fx+gy)^2$, welches Quadrat keine andere Factoren haben kann, als welche aus der Wurzel $fx+gy$ entspringen, setzt man also $fx+gy=pqr$, so wird unsere Formel $ppqqrr$, und kann also so viel Factoren haben, als man will. Hier wird von den zwey Zahlen x und y nur eine bestimmt, und die andere unserem Belieben frey gestellt, denn man bekommt $x=\frac{pqr-gy}{f}$, wo y leicht so angenommen werden kann, daß der Bruch wegfällt. Die leichteste Formel von dieser Art ist xx, nimmt man $x=pqr$, so schließt das Quadrat xx drey quadratische Factoren in sich, nämlich pp, qq und rr.

167.

Weit mehr Schwierigkeiten aber hat der dritte Fall, wo sich unsere Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt, und da erfordert es besondere Kunstgriffe, für x und y solche Werthe zu finden, aus welchen die Formel zwey oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern, so ist zu merken, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlet, man darf nämlich nur setzen $x = \frac{z - by}{2a}$, da denn diese Formel heraus gebracht wird:

$$\frac{zz - 2byz + bbyy}{4a} + \frac{byz - bbyy}{2a} + cyy = \frac{zz + (4ac - bb)yy}{4a}.$$

Wir wollen demnach sogleich das mittlere Glied weglassen, und diese Formel betrachten $axx + cyy$, wobey es darauf ankommt, was man den Buchstaben x und y für Werthe beylegen soll, damit diese Formel Factores erhalte. Es ist leicht zu erachten, daß solches von der Natur der Zahlen a und c abhänge, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

168.

Es sey also erstlich diese Formel gegeben $xx + yy$, welche alle Zahlen in sich begreifet, so eine Summe von zwey Quadraten ist, und wovon wir die kleinsten bis 50 hier vorstellen wollen.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, unter welchen sich einige Primzahlen befinden, die keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41; die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher

dyer wird, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben müsse, daß die Formel xx + yy Theiler oder Factores hat, und zwar so viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausschliessen, wo x und y einen gemeinen Theiler unter sich haben, weil alsdenn xx + yy sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen lassen; denn wäre z. E. x = 7p und y = 7q, so würde die Summe ihrer Quadrate 49pp + 49qq = 49 (pp + qq) sich gar durch 49 theilen lassen. Daher geht die Frage nur auf solche Formel, wo x und y keinen gemeinen Theiler haben, oder unter sich untheilbar seyn. Die Schwierigkeit fällt hier bald in die Augen, denn ob man gleich sieht, daß, wenn die beyden Zahlen x und y ungerade sind, alsdenn die Formel xx + yy eine gerade Zahl, und also durch 2 theilbar werde; ist aber eine gerade, und die andere ungerade, so wird die Formel ungerade, ob sie aber Theiler habe oder nicht? ist nicht so leicht zu sehen. Beyde Zahlen aber x und y können nicht gerade seyn, weil sie keinen gemeinen Theiler unter sich haben müssen.

169.

Es seyn demnach die beyden Zahlen x und y untheilbar unter sich, und gleichwohl soll die Formel xx + yy zwey oder mehr Factores in sich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht statt finden, weil sich diese Formel nicht in zwey rationale Factores auflösen läßt; allein die irrationale Factores, in welche diese Formel aufgelöst wird, und durch dieses Product vorgestellet werden kann $(x+y\sqrt{-1}).(x-y\sqrt{-1})$ können uns ebendenselben Dienst leisten; denn wenn die Formel xx + yy wirkliche Factores hat, so müssen die irrationale Factoren wiederum Factores haben, indem, wenn diese Factoren keine weitere Theiler hät-

ten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese Factores irrational, ja so gar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben sollen, so können dieselben keine rationale Factores haben, sondern sie müssen irrational und so gar imaginär von gleicher Art seyn.

170.

Will man also, daß diese Formel $xx+yy$ zwey rationale Factores bekomme, so gebe man beyden irrationalen Factoren auch zwey Factores, und setze erstlich $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$, da denn, weil $\sqrt{-1}$ so wohl negativ als positiv genommen werden kann, von selbst seyn wird $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$, also, daß das Product davon, das ist, unsere Formel seyn wird $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ und dieselbe folglich zwey rationale Factores enthält, nämlich $pp+qq$ und $rr+ss$. Hier ist aber noch übrig, die Werthe von x und y zu bestimmen, als welche auch rational seyn müssen.

Wenn man nun jene irrationale Factores mit einander multiplicirt, so bekommt man $x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$, und $x-y\sqrt{-1}=pr-qs-qr\sqrt{-1}-ps\sqrt{-1}$: addirt man diese Formeln, so wird $x=pr-qs$; subtrahirt man dieselben aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, oder $y=ps+qr$.

Nimmt man also $x=pr-qs$ und $y=ps+qr$, so erhält unsere Formel $xx+yy$ gewiß zwey Factores, indem heraus kommt $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$. Verlangte man mehr Factores, so dürfte man nur auf eben diese Art p und q so annehmen, daß $pp+qq$ zwey Factores hätte, und alsdenn hätte man in allem drey Factores, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben vermehret werden kann.

171.

171.

Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden: nimmt man z. E. q negativ, so wird $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$, von welchen die Summe der Quadraten eben diejenige ist als vorher; daraus ersehen wir, daß, wenn eine Zahl einem solchen Product $(pp + qq)(rr + ss)$ gleich ist, dieselbe auf eine doppelte Art in zwey Quadrate zerlegt werden könne, indem man gefunden erstlich $x = pr - qs$ und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$:

Es sey z. E. $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$, und $s = 1$, also, daß dieses Product heraus käme $13 \cdot 5 = 65 = xx + yy$, da denn seyn wird, entweder $x = 4$ und $y = 7$, oder $x = 8$ und $y = 1$; in beyden Fällen aber ist $xx + yy = 65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summe von zwey Quadratzahlen seyn. Man multiplicire z. E. $2^2 + 1^2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$, und $4^2 + 1^2 = 17$ mit einander, so kommt 1105, welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadraten zerlegt werden kann.

I.) $33^2 + 4^2$, II.) $22^2 + 9^2$, III.) $31^2 + 12^2$, IV.) $24^2 + 23^2$.

172.

Unter den Zahlen, die in der Form $xx + yy$ enthalten sind, befinden sich also erstlich solche, die aus zwey oder mehrere dergleichen Zahlen durch die Multiplication zusammengesetzt sind; hernach aber auch solche, welche nicht solchergestalt zusammengesetzt sind: diese wollen wir einfache Zahlen von der Form $xx + yy$ nennen, jene aber zusammengesetzte; daher werden die einfache Zahlen dieser Art seyn

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 &c.

in welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nämlich Primzahlen, oder solche, welche gar keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, und welche alle außer 2 so beschaffen sind, daß, wenn man 1 davon wegnimmt, das übrige durch 4 theilbar werde, oder welche alle in dieser Form $4n+1$ enthalten sind: hernach sind auch Quadratzahlen vorhanden, 9, 49 ꝛc. deren Wurzeln aber 3, 7 ꝛc. nicht vorkommen; wobey zu merken, daß diese Wurzeln 3, 7 ꝛc. in dieser Form $4n-1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbar, daß keine Zahl von dieser Form $4n-1$ eine Summe von zwey Quadraten seyn könne, denn da diese Zahlen ungerade sind, so müßte eines von den beyden Quadraten gerade das andere aber ungerade seyn; wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadraten durch 4 theilbar sind, die ungeraden aber in dieser Form $4n+1$ enthalten sind; wenn man daher ein gerades und ein ungerades Quadrat zusammen addirt, so bekommt die Summe immer diese Form $4n+1$, niemals aber diese Form $4n-1$. Daß aber alle Primzahlen von der Form $4n+1$ eine Summe von zwey Quadraten seyn, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.

173.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel $xx+2yy$ betrachten, um zu sehen, was x und y für Werthe haben müssen, damit dieselbe Factores erhalte. Da nun diese Formel durch diese imaginäre Factores vorgestellet wird $(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2})$, so ersieht man wie vorher, daß, wenn unsere Formel Factores hat, auch ihre imaginäre Factores welche haben müssen; man setze daher erstlich

$$x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2}),$$

so folget von selbst, daß auch seyn müsse $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$,

$(r-sr-2)$, und hieraus wird unsere Formel $xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ss)$, und hat also zwey Factores, deren so gar ein jeder von eben derselben Art ist; damit aber dieses geschehe, so müssen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches folgender Gestalt geschehen kann:

Da $x+yr-2=pr-2qs+qrr-2+psr-2$ und $x-yr-2=pr-2qs-qrr-2-psr-2$, so ist die Summe $2x=2pr-4qs$, folglich $x=pr-2qs$; hernach giebt die Differenz $2yr-2=2qrr-2+2psr-2$, daher $y=qr+ps$. Wenn also unsere Formel $xx+2yy$ Factores haben soll, so sind dieselben immer also beschaffen, daß der eine seyn wird $pp+2qq$ und der andere $rr+2ss$, oder sie sind beyde Zahlen von eben der Art, als $xx+2yy$; und damit dieses geschehe, so können x und y wieder auf zweyerley Art bestimmt werden, weil q so wohl negativ als positiv genommen werden kann. Man wird nämlich haben, erstlich $x=pr-2qs$ und $y=ps+qr$, und hernach auch $x=pr+2qs$ und $y=ps-qr$.

174.

Diese Formel $xx+2yy$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen, und welche wir hier bis auf 50 setzen wollen: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50; die wir wieder wie vorher in einfache und zusammengesetzte abtheilen können; da werden denn die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende seyn, 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, welche alle außer den Quadraten 25 und 49 Primzahlen sind: von denen aber, die hier nicht stehen, kommen die Quadrate vor. Man kann

hier

hier auch bemerken, daß alle Primzahlen, die in unserer Formel enthalten sind, entweder in dieser Form $8n+1$, oder in dieser $8n+3$ gehören, da hingegen die übrigen, welche entweder in dieser Form $8n+5$, oder in dieser $8n+7$ enthalten sind, nimmermehr aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen können: es ist aber auch gewiß, daß alle Primzahlen, die in einer von den ersten beyden Formen $8n+1$ und $8n+3$ enthalten sind, sich allezeit in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen lassen.

175.

Laßt uns auf eine gleiche Weise zu dieser allgemeinen Formel $xx+cyy$ fortschreiten, und sehen, was man x und y für Werthe geben muß, damit diese Formel Factores erhalte.

Da nun dieselbe durch dieses Product vorgestellet wird $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, so gebe man einem jeden dieser Factoren wiederum zwey Factores von gleicher Art: man setze nämlich $x+y\sqrt{-c} = (p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c})$, und $x-y\sqrt{-c} = (p-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c})$; und da wird unsere Formel werden $xx+cyy = (pp+cqq)(rr+css)$, woraus erhellet, daß die Factores wiederum von eben der Art als die Formel selbst seyn werden, die Werthe aber von x und y werden sich folgender Gestalt verhalten; $x=pr+cqs$ und $y = qr+ps$, oder $y = ps-qr$, und hieraus ist leicht abzusehen, wie unsere Formel noch mehr Factores erhalten könne.

176.

Nun ist es auch leicht, dieser Formel $xx-cyy$ Factores zu verschaffen, weil man nur $-c$ anstatt $+c$ schreiben darf: inzwischen lassen sich dieselben auch unmittel-

mittelbar also finden; da unsere Formel diesem Product gleich ist $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, so setze man $x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})(r+s\sqrt{c})$ und $x-y\sqrt{c}$ $(p-q\sqrt{c})(r-s\sqrt{c})$, woraus so gleich diese Factores erfolgen $xx-cyy=(pp-cqq)(rr-css)$, welche wieder von eben der Art als unsere Formel selbst sind; die Werthe aber von x und y lassen sich auch wiederum auf eine doppelte Art bestimmen, nämlich erstlich $x=pr+cqs$, $y=qr+ps$, und hernach auch $x=pr-cqs$ und $y=ps-qr$. Will man die Probe machen, ob solchergestalt das gefundene Product heraus komme, so probire man die erstern Werthe, da denn seyn wird $xx=pprr+2cpqrs+ccqqss$ und $y=ppss+2pqrs+qqrr$, also $cyy=cppss+2cpqrs+cqqrr$, woraus man erhält:

$$xx-cyy=pprr-cppss+ccqqss-cqqrr,$$

welches mit dem gefundenen Product $(pp-cqq)(rr-css)$ überein kommt.

177.

Bis hieher haben wir das erste Glied bloß betrachtet, nun wollen wir setzen, daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sey, und suchen, was die Formel $axx+cyy$ für Factores erhalten könne.

Hier ist nun klar, daß unsere Formel diesem Product gleich sey $(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c})$, welchen beyden Factoren demnach wiederum Factores gegeben werden müssen. Hierbey aber ereignet sich eine Schwierigkeit, denn wenn man zufolge der obigen Art setzen wollte $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})$ $(r\sqrt{a}+s\sqrt{-c})=apr-cqs+ps\sqrt{-ac}+qr\sqrt{-ac}$, und $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}-s\sqrt{-c})$ $=apr-cqs-ps\sqrt{-ac}-qr\sqrt{-ac}$, woraus man erhielte $2x\sqrt{a}=2apr-2cqs$, und $2y\sqrt{-c}=2ps\sqrt{-ac}$

$-ac+2qr\sqrt{}-ac$, so würde man so wohl für x als y irrationale Werthe finden, welche hier keinesweges statt finden.

178.

Dieser Schwierigkeit aber kann abgeholfen werden, wenn man setzet:

$x\sqrt{}a+y\sqrt{}-c=(p\sqrt{}a+q\sqrt{}-c)(r+s\sqrt{}-ac)$ $=pr\sqrt{}a-cqs\sqrt{}a+qr\sqrt{}-c+aps\sqrt{}-c$ und $x\sqrt{}a-y\sqrt{}-c=(p\sqrt{}a-q\sqrt{}-c)(r-s\sqrt{}-ac)=pr\sqrt{}a-cqs\sqrt{}a-qr\sqrt{}-c-aps\sqrt{}-c$; woraus nun für x und y folgende rationale Werthe gefunden werden; $x=pr-cqs$ und $y=qr+aps$, alsdenn aber wird unsere Formel folgende Factores bekommen $axx+cyy=(app+cqq)(rr+acss)$, von welchen nur einer eben die Form hat als unsere Formel, der andere aber von einer ganz anderen Gattung ist.

179.

Unterdessen stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandtschaft mit einander, indem alle Zahlen, so in der ersteren Form enthalten sind, wenn sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wiederum in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $xx+acyy$, als welche mit der obigen $xx+cyy$ übereinkommt, mit einander multipliciret, wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Also ist nur noch zu untersuchen, wenn zwey Zahlen von der ersten Form $axx+cyy$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdenn gehöre.

Laßt uns demnach diese zwey Formeln von der ersten Art $(app+cqq)(arr+css)$ mit einander multiplici-

ren,

ren, und da ist leicht zu sehen, daß ihr Product also vorgestellt werden könne $(apr+cqs)^2+ac(ps-qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr+cqs=x$ und $ps-qr=y$, so bekommen wir diese Formel $xx+acyy$, welche von der letzteren Art ist; daher denn zwey Zahlen von der erstern Art $axx+cyy$ mit einander multiplicirt, eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kürzlich also vorstellen kann; die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der andern Art aber durch II, andeuten, und also I. I giebt II; I. II giebt I; II. II giebt II, woraus auch ferner erhellet, was heraus kommen müsse, wenn man mehrere solche Zahlen mit einander multiplicirt; als I. I. I giebt I; I. I. II giebt II; I. II. II giebt I; II. II. II giebt II.

180.

Um dieses zu erläutern, so sey $a=2$ und $c=3$, woraus diese zwey Arten von Zahlen entspringen, die erste ist enthalten in der Form $2xx+3yy$, die andere aber in der Form $xx+6yy$. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten.

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der ersten Art z. E. 35 mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx+3yy$ enthalten ist, oder man kann vor y eine solche Zahl finden, daß $1085-3yy$ ein doppeltes Quadrat, nämlich $2xx$ werde; dieses geschieht nun erstlich, wenn $y=3$, denn da wird $x=23$; hernach auch

wenn

wenn $y = 11$, denn da wird $x = 19$; drittens auch noch, wenn $y = 13$, denn da wird $x = 17$, und endlich viertens, wenn $y = 19$, denn da wird $x = 1$. Man kann diese beyde Arten von Zahlen wiederum in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind, welche aus zwey oder mehr kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen: also werden von der ersten Art die folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29, diese aber zusammengesetzt 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, &c.

Von der zweyten Art aber sind folgende einfach 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt, nämlich 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

Capitel 12.

Von der Verwandelung dieser Formel $axx + cyy$ in Quadraten, oder auch höhere Potestäten.

181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von dieser Form $axx + cyy$ öfters unmöglich zu Quadraten gemacht werden können: so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden, in welcher $a = 1$ ist. Z. E. diese Form $2pp - qq$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch solcher Gestalt vorstellen $(2p+q)^2 - 2(p+q)^2$. Setzt man nun $2p + q = x$ und $p + q = y$, so

kommt

kommt diese Formel $xx - 2yy$ heraus, wo $a = 1$ und $c = -2$ ist. Eben eine solche Verwandelung findet auch immer statt, so oft es möglich ist, dergleichen Formeln zu einem Quadrat zu machen.

Wenn demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Quadrat oder einer andern höhern geraden Potestät gemacht werden soll, so können wir sicher setzen $a = 1$, und die übrigen Fälle als unmöglich ansehen.

182.

Es sey daher diese Formel vorgelegt $xx + cyy$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Da nun dieselbe aus diesen Factoren besteht $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, so müssen dieselben entweder Quadrate, oder mit einerley Zahlen multiplicirte Quadrate seyn. Denn wenn das Product von zweyen Zahlen ein Quadrat seyn soll, als z. E. pq, so wird erfordert, entweder, daß $p = rr$ und $q = ss$, das ist, daß ein jeder Factor vor sich ein Quadrat sey, oder daß $p = mrr$ und $q = mss$, das ist, daß die Factores Quadrate mit einerley Zahl multiplicirt seyn, deswegen setze man $x + y\sqrt{-c} = m(p + q\sqrt{-c})^2$, so wird von selbst $x - y\sqrt{-c} = m(p - q\sqrt{-c})^2$, daher bekommen wir $xx + cyy = mm(pp + cqq)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber x und y zu bestimmen, so haben wir diese Gleichungen $x + y\sqrt{-c} = mpp + 2mpq\sqrt{-c} - cmqq$ und $x - y\sqrt{-c} = mpp - 2mpq\sqrt{-c} - cmqq$, wo offenbar daß x gleich seyn muß dem rationalen Theil; $y\sqrt{-c}$, aber dem irrationalen Theil; daher wird $x = mpp - mcqq$; und $y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}$ oder $y = 2mpq$.

Setzt man also $x = mpp - mcqq$ und $y = 2mpq$, so wird unsere Formel $xx + cyy$ ein Quadrat, nämlich $mm(pp + cqq)^2$, davon die Wurzel ist $mpp + mcqq$.

183.

Sollen die zwey Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn, oder keinen gemeinen Theiler haben, so muß $m = 1$ gesetzt werden. Wenn daher $xx + cyy$ ein Quadrat seyn soll, so nimmt man nur $x = pp - cqq$ und $y = 2pq$, da denn diese Formel dem Quadrat $pp + cqq$ gleich wird. Anstatt daß man setzt $x = pp - cqq$, so kann man auch setzen $x = cqq - pp$, weil beyderseits das Quadrat xx einerley wird. Dieses sind nun eben diejenige Formel, die wir schon oben aus ganz andern Gründen gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätiget wird.

Denn nach der vorigen Methode, wenn $xx + cyy$ ein Quadrat seyn soll, so setzt man die Wurzel $= x + \frac{py}{q}$, und da bekommt man $xx + cyy = xx + \frac{2pxy}{q} + \frac{ppyy}{qq}$, wo sich die xx aufheben, die übrigen Glieder aber durch y dividirt und mit qq multiplicirt geben $cqqy = 2pqx + ppy$, oder $cqqy - ppy = 2pqx$: man theile nun durch $2pq$ und durch y, so wird $\frac{x}{y} = \frac{cqq - pp}{2pq}$. Da aber x und y untheilbar seyn sollen, wie auch p und q dergleichen sind, so muß x dem Zehler und y dem Nenner gleich seyn, folglich $x = cqq - pp$ und $y = 2pq$, wie vorher.

184.

Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ seyn; hat dieselbe aber selbst Factores, als wenn die vorgegebene Formel wäre $xx + acyy$, welche ein Quadrat seyn soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche giebt $x = acqq - pp$

und $y = 2pq$, sondern auch noch diese $x = cqq - app$ und $y = 2pq$; denn da wird ebenfals $xx + acyy = ccq^4 + 2acppqq + aap^4 = (cqq + app)^2$, welches auch geschieht, wenn man nimmt $x = app - cqq$, weil das Quadrat xx in beyden Fällen einerley herauskommt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode also gefunden. Man setze $x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2$, und $x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2$, damit herauskomme $xx + acyy = (app + cqq)^2$, und also gleich einem Quadrat; alsdenn aber wird $x + y\sqrt{-ac} = app + 2pq\sqrt{-ac} - cqq$ und $x - y\sqrt{-ac} = app - 2pq\sqrt{-ac} - cqq$, woraus folgt $x = app - cqq$ und $y = 2pq$. Läßt sich also die Zahl ac auf mehrerley Arten in zwey Factoren zertheilen, so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

185.

Wir wollen dieses durch einige bestimmte Formeln erläutern, und erstlich diese Formel $xx + yy$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac = 1$, so nehme man $x = pp - qq$ und $y = 2pq$, so wird $xx + yy = (pp + qq)^2$.

Soll zweytens diese Formel $xx - yy$ ein Quadrat werden, so ist $ac = -1$; man nehme also $x = pp + qq$ und $y = 2pq$, da denn $xx - yy = (pp - qq)^2$ wird.

Soll drittens diese Formel $xx + 2yy$ ein Quadrat werden, wo $ac = 2$, so nehme man $x = pp - 2qq$, oder $x = 2pp - qq$ und $y = 2pq$, und denn wird $xx + 2yy = (pp + 2qq)^2$, oder $xx + 2yy = (2pp + qq)^2$.

Soll viertens diese Formel $xx - 2yy$ ein Quadrat werden wo $ac = -2$, so nehme man $x = pp + 2qq$ und $y = 2pq$, da denn kommt $xx - 2yy = (pp - 2qq)^2$.

Soll fünftens diese Formel $x + 6yy$ ein Quadrat werden, wo $ac = 6$, und also entweder $a = 1$ und $c = 6$,

oder a = 2 und c = 3; so kann man erstlich setzen x = pp − 6 qq und y = 2pq, da denn xx + 6 yy = (pp + 6qq)². Hernach kann man auch setzen x = 2pp − 3qq und y = 2pq, da denn xx + 6 yy = (2pp + 3qq)².

186.

Sollte aber diese Formel axx + cyy zu einem Quadrat gemacht werden, so ist schon erinnert worden, daß dieses nicht geschehen könne wofern nicht schon ein Fall bekannt ist, in welchem diese Formel wirklich ein Quadrat werde. Dieser bekannte Fall sey demnach, wenn x = f und y = g, also daß aff + cgg = hh; und alsdenn kann unsere Formel in einer andern von dieser Art tt + acuu verwandelt werden, wenn man setzt $t = \frac{afx + cgy}{h}$ und $u = \frac{gx - fy}{h}$; denn da wird

$$tt = \frac{aaffxx + 2acfgxy + ccggyy}{hh}$$

$$\text{und } uu = \frac{ggxx - 2fgxy + ffyy}{hh},$$

woraus folgt tt + acuu

$$= \frac{aaffxx + ccggyy + acggxx + acffyy}{hh}$$

$$= \frac{axx(aff + cgg) + cyy(aff + cgg)}{hh}$$; da nun

aff + cgg = hh, so wird tt + acuu = axx + cyy; und solchergestalt bekommt die vorgelegte Formel axx + cyy diese Form tt + acuu, welche nach den hier gegebenen Regeln leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann.

187.

Nun wollen wir weiter fortgehen, und zusehen, wie diese Formel axx + cyy, wo x und y unter sich un-

theil-

theilbar seyn sollen, zu einem Cubo gemacht werden könne; wozu die vorigen Regeln keinesweges hinlänglich sind, die hier angebrachte Methode aber mit dem besten Fortgange angewandt werden kann: wobey noch dieses insonderheit zu merken, daß diese Formel allezeit zu einem Cubo gemacht werden könne, die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, welches bey den Quadraten nicht angieng, wofern nicht schon ein Fall bekannt war; welches auch von allen andern geraden Potestäten gilt; bey den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten, ꝛc. Potestät, ist die Auflösung immer möglich.

188.

Wenn demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Cubo gemacht werden soll, so setze man auf eine ähnliche Weise als vorher
$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$ und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$, denn daraus wird das Product $axx + cyy = (app + cqq)^3$, und also unsere Formel ein Cubus: es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf eine rationale Art bestimmt werden könne? welches glücklicher weise gelingt; denn wenn die angesetzten Cubi wirklich genommen werden, so erhalten wir diese zwey Gleichungen
$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} - 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c}$, woraus offenbar folgt, daß $x = ap^3 - 3cpqq$, und $y = 3appq - cq^3$.

Man suche z. E. zwey Quadrate xx und yy, deren Summe $xx + yy$ einen Cubus ausmache: weil nun hier $a = 1$ und $c = 1$, so bekommen wir $x = p^3 - 3pqq$ und $y = 3ppq - q^3$, und alsdenn wird $xx + yy$

$= (pp$

$= (pp + qq)^3$. Es sey nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 2$ und $y = 11$; hieraus $xx + yy = 125 = 5^3$.

189.

Wir wollen noch diese Formel betrachten $xx + 3yy$, welche zu einem Cubo gemacht werden soll: weil nun hier $a = 1$ und $c = 3$, so wird $x = p^3 - 9pqq$ und $y = 3ppq - 3q^3$, und alsdenn $xx + 3yy = (pp + 3qq)^3$. Weil diese Formel öfters vorkommt wollen wir davon die leichtere Fälle hieher setzen.

p	q	x	y	xx + 3yy
1	1	8	0	$64 = 4^3$
2	1	10	9	$343 = 7^3$
1	2	35	18	$2197 = 13^3$
3	1	0	24	$1728 = 12^3$
1	3	80	72	$21952 = 28^3$
3	2	81	30	$9261 = 21^3$
2	3	154	45	$29791 = 31^3$

190.

Wäre die Bedingung nicht vorgeschrieben, daß die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbar seyn sollen, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: denn wenn $axx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so setze man $x = tz$ und $y = uz$, so wird unsere Formel $attzz + cuuzz$ welche dem Cubo $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus sogleich gefunden wird $z = v^3 (att + cuu)$; folglich sind die gesuchten Werthe für x und y, $x = tv^3 (att + cuu)$ und $y = uv^3 (att + cuu)$, welche außer dem Cubo v^3 noch $att + cuu$ zum gemeinen Theiler haben: diese Auflösung giebt so gleich $axx + cyy = v^6 (att + cuu)^2 (att + cuu) = v^6 (att$

$+ c$

$+ cuu)^3$, welches offenbar der Cubus ist von v^2 $(att + cuu)$.

191.

Die hier gebrauchte Methode ist um so viel merkwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und so gar imaginärer Formeln solche Auflösungen gefunden haben, wozu einig und allein rationale und so gar ganze Zahlen erfordert wurden. Noch merkwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen wo die Irrationalität verschwindet, unsere Methode nicht mehr statt findet: denn wenn z. E. $xx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so kann man sicher schließen, daß auch die beyden irrationalen Factoren davon, nämlich $x + y\sqrt{-c}$ und $x - y\sqrt{-c}$, Cubos seyn müssen; weil dieselben unter sich untheilbar sind indem die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, als wenn z. E. $c = -1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr statt finden, weil alsdenn die beyden Factoren nämlich $x + y$ und $x - y$ allerdings gemeine Theiler haben könnten, ohngeachtet x und y dergleichen nicht haben, z. E. wenn beyde ungerade Zahlen wären.

Wenn demnach $xx - yy$ ein Cubus seyn soll, so ist nicht nöthig, daß so wohl $x + y$ als $x - y$ für sich ein Cubus sey, sondern man könnte wohl setzen $x + y = 2p^3$ und $x - y = 4q^3$, da denn $xx - yy$ unstreitig ein Cubus würde nämlich $8p^3q^3$, davon die Cubicwurzel ist $2pq$: alsdenn aber wird $x = p^3 + 2q^3$, und $y = p^3 - 2q^3$. Wenn aber die Formel $axx + cyy$ sich nicht in zwey rationale Factores zertheilen läßt, so finden auch keine andere Auflösungen statt, als die hier gegeben worden.

192.

Wir wollen diese Abhandlung durch einige merkwürdige Fragen erläutern:

I. Frage man verlangt in ganzen Zahlen ein Quadrat xx daß wenn dazu 4 addirt wird, ein Cubus herauskomme; dergleichen sind 4 und 121, ob aber mehr dergleichen gegeben werden können, ist hier die Frage?

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle da $xx + yy$ ein Cubus wird, welches wie aus dem obigen erhellet, geschieht, wenn $x = p^3 - 3pqq$ und $y = 3ppq - q^3$: da nun hier $yy = 4$, so ist $y = \pm 2$, folglich muß seyn $3ppq - q^3 = +2$ oder $3pqq - q^3 = -2$: im erstern Fall wird also $q(3pp - qq) = 2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sey demnach erstlich $q = 1$, so wird $3pp - 1 = 2$, folglich $p = 1$ und also $x = 2$ und $xx = 4$.

Setzt man $q = 2$, so wird $6pp - 8 = \pm 2$; gilt das Zeichen +, so wird $6pp = 10$ und $pp = \frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde, und hier also nicht statt fände; gilt aber das Zeichen − so wird $6pp = 6$ und $p = 1$, folglich $x = 11$. Mehr Fälle giebt es nicht, und also können nur zwey Quadraten gegeben werden, nämlich 4 und 121, welche wenn dazu 4 addirt wird Cubi werden.

193.

II. Frage: Man verlangt solche Quadrate in ganzen Zahlen, welche, wenn dazu 2 addirt wird Cubi werden, wie bey dem Quadrat 25 geschieht: ob es nun noch mehr dergleichen giebt wird hier gefragt?

Da also $xx + 2$ ein Cubus seyn soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle, wo die Formel $xx + 2yy$ ein Cubus wird, wel-

welches aus dem obigen Articul (188), wo $a = 1$ und $c = 2$ geschieht, wenn $x = p^3 - 6pqq$ und $y = 3ppq - 2q^3$; da nun hier $y = \pm 1$ so muß seyn $3ppq - 2q^3 = q(3pp - 2qq) = \pm 1$, und also q ein Theiler von 1; es sey demnach $q = 1$, so wird $3pp - 2 = \pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3pp = 3$ und $p = 1$, folglich $x = 5$; das untere Zeichen aber giebt vor p einen irrationalen Werth, welcher hier nicht statt findet; woraus folgt, daß nur das einzige Quadrat 25 in ganzen Zahlen die verlangte Eigenschaft habe.

194.

III. Frage: Man verlangt solche fünffache Quadrate, wenn dazu 7 addirt wird, daß ein Cubus herauskomme: oder daß $5xx + 7$ ein Cubus sey?

Man suche erstlich diejenigen Fälle, da $5xx + 7yy$ ein Cubus wird, welches nach dem Articul (188) wo $a = 5$ und $c = 7$ geschieht, wenn $x = 5p^3 - 21pqq$ und $y = 15ppq - 7q^3$: weil nun hier seyn soll $y = \pm 1$, so wird $15ppq - 7q^3 = q(15pp - 7qq) = \pm 1$, da denn q ein Theiler seyn muß von 1, folglich $q = 1$; daher wird $15pp - 7 = \pm 1$, wo beyde Fälle für p etwas irrationales geben, woraus aber doch nicht geschlossen werden kann, daß diese Frage gar nicht möglich sey, weil p und q solche Brüche seyn könnten, da $y = 1$ und x doch eine ganze Zahl würde; solches geschieht wirklich, wenn $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{2}$, denn da wird $y = 1$ und $x = 2$; mit andern Brüchen aber ist die Sache nicht möglich.

195.

IV. Frage: Man suche solche Quadrate in ganzen Zahlen, welche doppelt genommen wenn davon 5 subtrahirt wird, daß ein Cubus heraus komme; oder $2xx - 5$ soll ein Cubus seyn.

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $2xx - 5yy$ ein Cubus wird, welches nach dem 188ten Artikel, wo $a = 2$ und $c = -5$, geschieht, wenn $x = 2p^3 + 15pqq$ und $y = 6ppq + 5q^3$. Hier aber muß seyn $y = \pm 1$, und folglich $6ppq + 5q^3 = q(6pp + 5qq) = \pm 1$, welches in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, und auch nicht einmal in Brüchen; daher dieser Fall sehr merkwürdig ist, da gleichwohl eine Auflösung statt findet, wenn nämlich $x = 4$, denn da wird $2xx - 5 = 27$, welches der Cubus ist von 3; und hievon ist es von der größten Wichtigkeit den Grund zu untersuchen.

196.

Es ist also möglich, daß $2xx - 5yy$ ein Cubus seyn könne dessen Wurzel sogar diese Form hat $2pp - 5qq$, wenn nämlich $x = 4$, $y = 1$ und $p = 2$, $q = 1$, und demnach haben wir einen Fall wo $2xx - 5yy = (2pp - 5qq)^3$, ungeachtet die beyden Factoren von $2xx - 5yy$ nämlich $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2} - y\sqrt{5}$, keine Cubi sind, da dieselben doch nach dieser Methode die Cubi von $p\sqrt{2} + q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2} - q\sqrt{5}$ seyn sollten, indem in unserm Fall $x\sqrt{2} + y\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + \sqrt{5}$, hingegen $(p\sqrt{2} + q\sqrt{5})^3 = (2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 46\sqrt{2} + 29\sqrt{5}$, welches keinesweges mit $4\sqrt{3} + \sqrt{5}$ überein kommt.

Es ist aber zu merken, daß diese Formel $rr - 10ss$ in unendlich viel Fällen 1 oder -1 werden kann; wenn nämlich $r = 3$ und $s = 1$, ferner wenn $r = 19$ und $s = 6$, welche mit dieser Formel $2pp - 5qq$ multiplicirt wieder eine Zahl von der letztern Form giebt.

Es sey demnach $ff - 10gg = 1$, und anstatt daß wir oben gesetzt haben $2xx - 5yy = (2pp - 5qq)^3$, so können wir jetzt auch auf eine allgemeinere Art setzen $2xx - 5yy = (ff - 10gg) \cdot (2pp - 5qq)^3$, und

die

die Factores davon genommen geben $x\sqrt{2} \pm y\sqrt{5} = (f \pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3$. Es ist aber $(p\sqrt{2} \pm q\sqrt{5})^3 = (2p^3 + 15pqq)\sqrt{2} \pm (6ppq + 5q^3)\sqrt{5}$, wofür wir der Kürze halber schreiben wollen $A\sqrt{2} + B\sqrt{5}$, welches mit $f + g\sqrt{10}$ multiplicirt giebt $Af\sqrt{2} + Bf\sqrt{5} + 2Ag\sqrt{5} + 5Bg\sqrt{2}$, welches dem $x\sqrt{2} + y\sqrt{5}$ gleich seyn muß, woraus entspringet $x = Af + 5Bg$ und $y = Bf + 2Ag$; da nun $y = \pm 1$ seyn muß, so ist nicht unumgänglich nöthig daß $6ppq + 5q^3 = 1$ werde, sondern es ist genug, wenn nur die Formel $Bf + 2Ag$, das ist $f(6ppq + 5q^3) + 2g(2p^3 + 15pqq)$ dem ± 1 gleich werde, wo f und g vielerley Werthe haben können. Es sey z. E. $f = 3$ und $g = 1$, so muß diese Formel $18ppq + 15q^3 + 4p^3 + 30pqq$ dem ± 1 gleich werden, oder es muß seyn $4p^3 + 18ppq + 30pqq + 15q^3 = \pm 1$.

197.

Diese Schwierigkeit alle dergleichen mögliche Fälle heraus zu bringen findet sich aber nur alsdenn, wenn in der Formel $axx + cyy$ die Zahl c negativ ist, weil alsdenn diese Formel $axx + cyy$ oder diese $xx - acyy$, so mit ihr in einer genauen Verwandtschaft stehet, 1 werden kann, welches aber niemals geschehen kann wenn c eine positive Zahl ist, weil $axx + cyy$ oder $xx + acyy$ immer größere Zahlen giebt, je größer x und y genommen werden. Daher die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden kann, wenn die beyden Zahlen a und c positiv genommen werden.

198.

Wir kommen also zur vierten Potestät und bemerken zuförderst, daß wenn die Formel $axx + cyy$

ein

ein Biquadrat werden soll, die Zahl a = 1 seyn müsse; denn wenn dieselbe kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich diese Formel nur zu einem Quadrat zu machen, oder wenn es möglich wäre so könnte dieselbe auch in dieser Form $tt + acuu$ verwandelt werden, daher wir die Frage nur auf diese letztere Form, mit welcher die obige $xx + cyy$ wenn $a = 1$ übereinstimmt, einschränken. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von x und y beschaffen seyn müssen, daß diese Formel $xx + cyy$ ein Biquadrat werde. Da nun dieselbe aus diesen zwey Factoren besteht $(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c})$, so muß ein jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art seyn, daher gesetzt werden muß $x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})^4$ und $x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})^4$, woraus unsere Formel diesem Biquadrat $(pp + cqq)^4$ gleich wird, die Buchstaben x und y selbst aber werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht bestimmt, wie folget:

$$x + y\sqrt{-c} = p^4 + 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq - 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4$$

$$x - y\sqrt{-c} = p^4 - 4p^3q\sqrt{-c} - 6cppqq + 4cpq^3\sqrt{-c} + ccq^4$$

folglich $x = p^4 - 6cppqq + ccq^4$ und

$$y = 4p^3q - 4cpq^3.$$

199.

Wenn also $xx + yy$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c = 1$ so haben wir diese Werthe $x = p^4 - 6ppqq + q^4$ und $y = 4p^3y - 4pq^3$ und alsdenn wird seyn $xx + yy = (pp + qq)^4$.

Laßt uns z. E. setzen $p = 2$ und $q = 1$, so bekommen wir $x = 7$ und $y = 24$; hieraus wird $xx + yy = 625 = 5$.

Nimmt

Nimmt man ferner $p = 3$ und $q = 2$, so bekommt man $x = 119$ und $y = 120$, daraus wird $xx + yy = 13^4$.

200.

Bey allen geraden Potestäten wozu die Formel $axx + cyy$ gemacht werden soll, ist ebenfalls unumgänglich nöthig, daß diese Formel zu einem Quadrat gemacht werden könne, zu welchem Ende genug ist daß man nur einen einzigen Fall wisse, wo dieses geschieht; und alsdenn kann diese Formel wie wir oben gesehen haben, in dieser Gestalt verwandelt werden $tt + acuu$, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also als in dieser Form $xx + cyy$ enthalten, angesehen werden kann, welche hierauf auf eine ähnliche Weise, sowohl zur sechsten Potestät als einer jeglichen andern noch höhern geraden Potestät gemacht werden kann.

201.

Bey den ungeraden Potestäten aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so kann die Formel $axx + cyy$ allezeit zu einer jeglichen ungeraden Potestät gemacht werden. Denn verlangt man z. E. die fünfte Potestät, so darf man nur setzen $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^5$, da denn offenbar wird $axx + cyy = (app + cqq)^5$. Weil nun die fünfte Potestät von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist $aap^5\sqrt{a} + 5aap^4q\sqrt{-c} - 10acp^3qq\sqrt{a} - 10acppq^3\sqrt{-c} + 5ccpq^4\sqrt{a} + ccq^5\sqrt{-c}$, woraus sogleich geschlossen wird $x = aap^5 - 10acp^3qq + 5ccpq^4$ und $y = 5aap^4q - 10acppq^3 + ccq^5$.

Ver-

Verlangt man also eine Summe von zwey Quadraten $xx + yy$, die zugleich eine fünfte Potestät sey, so ist $a = 1$ und $c = 1$; folglich $x = p^5 - 10p^3qq + 5pq^4$ und $y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5$. Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $q = 41$, und $xx + yy = 3125 = 5^5$.

Capitel 13.

Von einigen Formeln dieser Art $ax^4 + by^4$, welche sich nicht zu einem Quadrat machen lassen.

202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summe oder Differenz eine Quadratzahl würde; allein alle Mühe war vergebens, und endlich fand man sogar einen Beweis, daß weder diese Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle ausgenommen, wo nämlich bey der erstern entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bey der andern aber wo entweder $y = 0$ oder $y = x$, und in welchen Fällen die Sache offenbar vor Augen liegt. Daß aber in allen übrigen die Sache unmöglich seyn soll, ist um so viel mehr merkwürdig, weil wenn nur von schlechten Quadraten die Rede ist, unendlich viel Auflösungen statt finden.

203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vor allen Dingen zu bemerken, daß die beyden Zahlen x und y als untheilbar unter sich angesehen werden können;

nen; denn sollten dieselben einen gemeinen Theiler z. E. d haben, also daß man setzen könnte $x = dp$ und $y = dq$, so würden unsere Formeln $d^4p^4 + d^4q^4$ und $d^4p^4 - d^4q^4$, welche wenn sie Quadrate wären, auch durch das Quadrat d^4 dividirt, Quadrate bleiben müssen, also daß auch diese Formeln $p^4 + q^4$ und $p^4 - q^4$ Quadrate wären, wo nun die Zahlen p und q keinen weitern gemeinen Theiler haben; es ist demnach genug zu beweisen, daß diese Formeln in dem Falle da x und y unter sich untheilbar sind, keine Quadrate werden können, und alsdenn erstreckt sich der Beweis von selbst auf alle Fälle, da auch x und y gemeinschaftliche Theiler haben.

204.

Wir wollen demnach von der Summe zweyer Biquadraten nämlich dieser Formel $x^4 + y^4$ den Anfang machen, und wo wir x und y als unter sich untheilbare Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen daß $x^4 + y^4$ außer den obgemeldten Fällen kein Quadrat seyn könne, so wird der Beweis folgendergestalt geführet.

Wenn jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch $x^4 + y^4$ ein Quadrat würde, dieselben möchten auch so groß seyn als sie wollten, weil in kleinen gewiß keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß wenn auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern u. s. f. da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind, außer den zwey gemeldten, welche aber zu keinen andern führen, so kann man sicher schließen, daß auch

in

in größern, ja sogar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden seyn können. Und auf eben solche Art wird auch der Satz von der Differenz zweyer Biquadraten $x^4 - y^4$ bewiesen, wie wir sogleich zeigen wollen.

205.

Um erstlich zu zeigen daß $x^4 + y^4$ kein Quadrat seyn könne außer den beyden Fällen die für sich klar sind, so sind folgende Sätze wohl zu bemerken.

I. Nehmen wir an daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind oder keinen gemeinen Theiler haben; so sind sie entweder beyde ungerade, oder die eine ist gerade und die andere ungerade.

II. Beyde aber können nicht ungerade seyn, weil die Summe von zwey ungeraden Quadraten niemals ein Quadrat seyn kann: denn ein ungerades Quadrat ist allezeit in der Form $4n + 1$ enthalten, und also würde die Summe zweyer ungeraden Quadraten diese Form $4n + 2$ haben, welche sich durch 2 nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat seyn kann. Dieses aber gilt auch von zwey ungeraden Biquadraten.

III. Wenn demnach $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerade, das andere aber ungerade seyn. Wir haben aber oben gesehen, daß wenn die Summe zweyer Quadraten ein Quadrat seyn soll, die Wurzel des einen durch $pp - qq$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt werde; woraus folget daß seyn müßte $xx = pp - qq$ und $yy = 2pq$ und da würde $x^4 + y^4 = (pp + qq)^2$.

IV. Hier also würde y gerade, x aber ungerade seyn: da nun $xx = pp - qq$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade

gerade seyn: die erstere p aber kann nicht gerade seyn, weil sonst $pp - qq$ als eine Zahl von dieser Form $4n - 1$ oder $4n + 3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerade q aber gerade seyn, wo sich von selbst versteht daß dieselben untheilbar unter sich seyn müssen.

V. Da nun $pp - qq$ ein Quadrat, nämlich dem xx gleich seyn soll, so geschieht dieses wie wir oben gesehen, wenn $p = rr + ss$ und $q = 2rs$: denn da wird $xx = (rr - ss)^2$, und also $x = rr - ss$.

VI. Allein yy muß auch ein Quadrat seyn; da wir nun haben $yy = 2pq$, so wird jetzt $yy = 4rs(rr + ss)$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß: folglich muß auch $rs(rr + ss)$ ein Quadrat seyn, wo r und s unter sich untheilbare Zahlen sind, also daß auch die hier befindlichen drey Factores, r, s, und $rr + ss$, keinen gemeinen Theiler unter sich haben können.

VII. Wenn aber ein Product aus mehr Factoren, die unter sich untheilbar sind, ein Quadrat seyn soll, so muß ein jeder Factor für sich ein Quadrat seyn, also setze man $r = tt$ und $s = uu$: so muß auch $t^4 + u^4$ ein Quadrat seyn. Wenn demnach $x^4 + y^4$ ein Quadrat wäre, so würde auch hier $t^4 + u^4$, das ist ebenfalls eine Summe von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn. Wobey zu merken daß weil hier $xx = (t^4 - u^4)^2$ und $yy = 4ttuu(t^4 + u^4)$, die Zahlen t und u offenbar weit kleiner seyn würden als x und y, indem x und y sogar durch die vierte Potestäten von t und u bestimmt werden und also unstreitig weit größer seyn müssen.

VIII. Wenn daher zwey Biquadrate als x^4 und y^4 auch in den größten Zahlen vorhanden seyn sollten,

ten, deren Summe ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summe von zwey weit kleineren Biquadraten herleiten, welche ebenfalls ein Quadrat wäre; und aus diesen könnte nachmals noch eine kleinere dergleichen Summe geschlossen werden und so weiter, bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme: da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summe möglich ist, so folgt daraus offenbar daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte hier zwar einwenden daß es in den kleinen Zahlen wirklich solche gebe wie schon anfänglich bemerkt worden, nämlich da das eine Biquadrat Nulle wird; allein auf diesen Fall kommt man gewiß nicht, wenn man solchergestalt von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Denn wäre bey der kleineren Summe $t^4 + u^4$, entweder $t = 0$ oder $u = 0$, so würde auch bey der größern Summe nothwendig $yy = 0$ seyn; welcher Fall hier in keine Betrachtung kommt.

206.

Nun kommen wir zu dem andern Hauptsatz, daß auch die Differenz zwischen zwey Biquadraten als $x^4 - y^4$ niemals ein Quadrat werden könne, außer den Fällen $y = 0$ und $y = x$; zu dessen Beweis folgende Punkte zu merken.

I. Sind die Zahlen x und y als untheilbar unter sich anzusehen, und also entweder beyde ungerade oder die eine gerade und die andere ungerade. Da nun in beyden Fällen die Differenz von zweyen Quadraten wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwey Fälle besonders erwogen werden.

II. Es

II. Es seyn also erstlich die beyden Zahlen x und y ungerade, und man setze $x = p + q$ und $y = p - q$; so muß nothwendig eine dieser Zahlen p und q ungerade die andere aber gerade seyn. Nun wird $xx - yy = 4pq$ und $xx + yy = 2pp + 2qq$, folglich unsere Formel $x^4 - y^4 = 4pq(2pp + 2qq)$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch der vierte Theil davon $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, deren Factoren unter sich untheilbar sind: folglich muß ein jeder dieser Factoren 2p, q, und $pp + qq$ für sich ein Quadrat seyn, weil nämlich die eine Zahl p gerade, die andere q aber ungerade ist. Man setze daher um die beyden ersten zu Quadraten zu machen $2p = 4rr$ oder $p = 2rr$, und $q = ss$, wo s ungerade seyn muß, so wird der dritte Factor $4r^4 + s^4$ auch ein Quadrat seyn müssen.

III. Da nun $s^4 + 4r^4$ eine Summe von zwey Quadraten ist, davon s^4 ungerade, $4r^4$ aber gerade ist, so setze man die Wurzel des erstern $ss = tt - uu$, wo t ungerade und u gerade ist; des letztern aber $2rr = 2tu$ oder $rr = tu$, wo t und u unter sich untheilbar sind.

IV. Weil nun $tu = rr$ ein Quadrat seyn muß, so muß sowohl t als u ein Quadrat seyn; man setze demnach $t = mm$ und $u = nn$, wo m ungerade und n gerade ist, so wird $ss = m^4 - n^4$ also daß wieder eine Differenz von zwey Biquadraten, nämlich $m^4 - n^4$ ein Quadrat seyn müßte. Es ist aber klar daß diese Zahlen weit kleiner seyn würden als x und y, weil r und s offenbar kleiner sind als x und y, und hinwiederum m und n kleiner als r und s; wenn also die Sache in den größten Zahlen möglich und $x^4 - y^4$ ein

Quadrat wäre, so würde dieselbe in weit kleinern Zahlen auch noch möglich seyn, und so immer fort bis man endlich auf die kleinste Zahlen käme, wo die Sache möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber wo dieses möglich ist, sind wenn das eine Biquadrat gleich o oder dem andern gleich ist: wäre das erstere so müßte seyn $n = o$, folglich $u = o$, ferner $r = o$ und $p = o$ und $x^4 - y^4 = o$, oder $x^4 = y^4$; von einem solchen Fall ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n = m$, so würde $t = u$, weiter $s = o$, $q = o$ und endlich auch $x = y$, welcher Fall hier nicht statt findet.

207.

Man könnte hier einwenden, daß da m ungerade und n gerade ist, die letztere Differenz der erstern nicht mehr ähnlich sey, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen den Schluß machen könnte. Es ist aber genug daß man von der erstern Differenz auf die andere gekommen, und wir werden anjetzo zeigen daß auch $x^4 - y^4$ kein Quadrat seyn könne, wenn das eine Biquadrat gerade und das andere ungerade ist.

I. Wäre das erstere x^4 gerade und y^4 ungerade, so wäre die Sache an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n + 3$ heraus käme die kein Quadrat seyn kann. Es sey demnach x ungerade und y gerade, so muß seyn $xx = pp + qq$ und $y = 2pq$, denn so wird $x^4 - y^4 = p^4 - 2ppqq + q^4 = (pp - qq)^2$, wo von p und q das eine gerade das andere aber ungerade seyn muß.

II. Da nun $pp + qq = xx$ ein Quadrat seyn muß, so wird $p = rr - ss$ und $q = 2rs$; folglich $x = rr + ss$. Hieraus aber wird $yy = 2(rr - ss).2rs$

oder

oder $yy = 4rs(rr - ss)$, welches ein Quadrat seyn muß, und also auch der vierte Theil davon nämlich $rs(rr - ss)$, wovon die Factoren unter sich untheilbar sind.

III. Man setze demnach $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr - ss = t^4 - u^4$, welcher ebenfalls ein Quadrat seyn muß; da nun derselbe auch eine Differenz von zwey Biquadraten ist, welche viel kleiner sind als die ersten, so erhält hierdurch der vorige Beweis seine völlige Stärke, also daß wenn auch in den größten Zahlen die Differenz zweyer Biquadraten ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere dergleichen Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwey offenbare Fälle zu kommen: daher gewiß auch in den größten Zahlen solches nicht möglich ist.

208.

Der erste Theil dieses Beweises da die Zahlen x und y beyde ungerade genommen werden, kann folgender Gestalt abgekürzet werden. Wenn $x^4 - y^4$ ein Quadrat wäre, so müßte seyn $xx = pp + qq$ und $yy = pp - qq$, wo von den Buchstaben p und q der eine gerade der andere aber ungerade wäre: alsdenn aber würde $xx\,yy = p^4 - q^4$, folglich müßte $p^4 - q^4$ auch ein Quadrat seyn, welches eine Differenz von zwey solchen Biquadraten ist, davon das eine gerade das andere aber ungerade ist: daß dieses aber unmöglich sey, ist in dem zweyten Theil des Beweises gezeigt worden.

209.

Wir haben also diese zwey Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summe noch die Differenz zweyer

Biquadraten jemals eine Quadratzahl werden könne, außer einigen wenigen offenbaren Fällen.

Wenn demnach auch andere Formeln welche zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summe oder eine Differenz von zweyen Biquadraten ein Quadrat werden müßte, so sind dieselben Formeln ebenfalls nicht möglich. Dieses findet nun statt in den folgenden Formeln, welche wir hier anführen wollen.

I. Ist es nicht möglich daß diese Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat werde: denn weil diese Formel eine Summe von zwey Quadraten ist, so müßte seyn $xx = pp - qq$ und $2yy = 2pq$ oder $yy = pq$; da nun p und q untheilbar unter sich sind, so müßte ein jedes ein Quadrat seyn. Setzt man daher $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 - s^4$: also müßte eine Differenz von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

II. Ist es auch nicht möglich daß diese Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat werde: denn da müßte seyn $xx = pp + qq$ und $2yy = 2pq$, weil alsdenn heraus käme $x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2$; da nun $yy = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat seyn; setzt man nun $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summe von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welche nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß diese Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat werde, weil alsdenn y nothwendig eine gerade Zahl seyn müßte. Setzt man nun $y = 2z$, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat seyn müssen, welches nach dem vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es

IV. Es ist auch nicht möglich, daß diese Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat werde; denn da dasselbe gerade seyn müßte, und folglich $2x^4 + 2y^4 = 4zz$ wäre, so würde seyn $x^4 + y^4 = 2zz$, und daher $2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$ und also ein Quadrat. Eben so würde seyn $2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$ und also auch ein Quadrat. Da nun sowohl $2zz + 2xxyy$ als $2zz - 2xxyy$ ein Quadrat seyn würde, so müßte auch ihr Product $4z^4 - 4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat seyn. Dieser vierte Theil aber ist $z^4 - x^4y^4$ und also eine Differenz von zwey Biquadraten, welches nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch diese Formel $2x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn; denn da beyde Zahlen x und y nicht gerade sind, weil sie sonsten einen gemeinen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerade und die andere ungerade, weil sonst der eine Theil durch 4 der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbar seyn würde, so müssen beyde ungerade seyn. Setzt man nun $x = p + q$ und $y = p - q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerade die andere aber ungerade, und da:

$2x^4 - 2y^4 = 2(xx + yy)(xx - yy)$, so bekommt man $xx + yy = 2pp + 2qq = 2(pp + qq)$ und $xx - yy = 4pq$; also unsere Formel $16pq(pp + qq)$ deren sechzehnte Theil, nämlich $pq(pp + qq)$, folglich auch ein Quadrat seyn müßte. Da nun die Factores unter sich untheilbar sind, so müßte ein jeder für sich ein Quadrat seyn. Setzt man nun für die beyden erstern $p = rr$ und $q = ss$, so wird der dritte $r^4 + s^4$, welcher auch ein Quadrat seyn müßte: dieses aber ist nicht möglich.

210.

Auf eine gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß diese Formel $x^4 + 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht.

I. Kann x nicht gerade seyn, weil alsdenn y ungerade seyn müßte, und die Formel sich nur durch 2 nicht aber durch 4 würde theilen lassen: daher muß x ungerade seyn.

II. Man setze demnach die Quadratwurzel unserer Formel $= xx + \frac{2pyy}{q}$, damit dieselbe ungerade werde; so wird $x^4 + 2y^4 = x^4 + \frac{4pxxyy}{q} + \frac{4ppy^4}{qq}$, wo sich die x^4 aufheben, die übrigen Glieder aber durch yy dividirt und mit qq multiplicirt, geben $4pqxx + 4ppyy = 2qqyy$, oder $4pqxx = 2qqyy - 4ppyy$, daraus wird $\frac{xx}{yy} = \frac{qq-2pp}{2pq}$; woraus folget $xx = qq - 2pp$ und $yy = 2pq$, welche eben die Formeln sind die wir schon oben gegeben haben.

III. Es müßte also $qq - 2pp$ wieder ein Quadrat seyn, welches nicht anders geschehen kann, als wenn $q = rr + 2ss$ und $p = 2rs$; denn da würde $xx = (rr - 2ss)^2$: hernach aber würde $4rs(rr + 2ss) = yy$, und also müßte auch der vierte Theil $rs(rr + 2ss)$ ein Quadrat seyn, und folglich r und s jedes besonders. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr + 2ss = t^4 + 2u^4$, welches auch ein Quadrat seyn müßte.

IV. Wäre demnach $x^4 + 2y^4$ ein Quadrat, so würde auch $t^4 + 2u^4$ ein Quadrat seyn, wo die Zahlen t und u weit kleiner wären als x und y; und

solchergestalt würde man immer auf kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat seyn kann, wie leicht zu probiren ist, so kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat seyn.

211.

Was hingegen diese Formel betrifft $x^4 - 2y^4$, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könnte, und wenn man auf eine ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können sogar unendlich viel Fälle gefunden werden, da dieselbe wirklich ein Quadrat wird.

Denn wenn $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat seyn soll, so ist oben gezeigt worden, daß seyn werde $xx = pp + 2qq$ und $yy = 2pq$, weil man alsdenn bekommt $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$. Da nun auch $pp + 2qq$ ein Quadrat seyn muß, so geschieht dieses wenn $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; denn da wird $xx = (rr + 2ss)^2$. Allein hier ist wohl zu merken, daß dieses auch geschehen würde, wenn man annehme $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, daher zwey Fälle hier in Erwegung zu ziehen sind.

I. Es sey erstlich $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$, so wird $x = rr + 2ss$; und weil $yy = 2pq$, so wird nun seyn $yy = 4rs\,(rr - 2ss)$; und müßten also r und s Quadrate seyn. Man setze deswegen $r = tt$ und $s = uu$, so wird $yy = 4ttuu\,(t^4 - 2u^4)$; also $y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; wenn daher $t^4 - 2u^4$ ein Quadrat ist, so wird auch $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat; ob aber gleich t und u kleinere Zahlen sind als x und y, so kann man doch wie vorher nicht schließen, daß $x^4 - 2y^4$ kein Quadrat seyn könne, deswegen weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleinern Zahlen

gelanget; denn $x^4 - 2y^4$ kann ein Quadrat seyn ohne auf diese Formel $t^4 - 2u^4$ zu kommen, weil dieses noch auf eine andere Art geschehen kann, nämlich in dem andern Fall, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sey also $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, so wird zwar wie vorher $xx = rr + 2ss$, allein für y bekommt man $yy = 2pq = 4rs\,(2ss - rr)$. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so bekommt man $yy = 4ttuu\,(2u^4 - t^4)$, folglich $y = 2tu\sqrt{(2u^4 - t^4)}$ und $x = t^4 + 2u^4$; woraus erhellet, daß unsere Formel $x^4 - 2y^4$ auch ein Quadrat werden könne, wenn diese $2u^4 - 4t^4$ ein Quadrat wird. Dieses aber geschieht offenbar, wenn $t = 1$ und $u = 1$; und daher bekommen wir $x = 3$ und $y = 2$, woraus unsere Formel $x^4 - 2y^4$ wird $81 - 2.16 = 49$.

III. Wir haben auch oben gesehen, daß $2u^4 - t^4$ ein Quadrat werde, wenn $u = 13$ und $t = 1$, weil alsdenn $\sqrt{(2u^4 - t^4)} = 239$. Setzt man nun diese Werthe für t und u, so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nämlich $x = 1 + 2.13^4 = 57123$ und $y = 2.13.239 = 6214$.

IV. Sobald man aber Werthe für x und y gefunden, so kann man dieselben in den Formeln No. I. für t und u schreiben, da man denn wieder neue für x und y erhalten wird.

Weil wir nun gefunden $x = 3$ und $y = 2$, so laßt uns in der No. I. gegebenen Formel setzen $t = 3$ und $u = 2$, da denn $\sqrt{(t^4 - 2u^4)} = 7$, so bekommen wir folgende neue Werthe $x = 81 + 2.16 = 113$ und $y = 2.3.2.7 = 84$. Hieraus erhalten wir $xx = 12769$, und $x^4 = 163047361$; ferner $yy = 7056$ und $y^4 = 49787136$, daher wird $x^4 - 2y^4 = 63473089$

wovon die Quadrat-Wurzel ist 7967, welche auch völlig übereintrifft mit der anfänglich angesetzten pp–2qq. Denn da t=3 und u= 2, so wird r=9 und s=4, daher p=81–32=49 und q=72, woraus pp – 2qq =2401 – 10368 – = – 7967.

Capitel 14.

Auflösung einiger Fragen, die zu diesem Theil der Analytic gehören.

212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theil der Analytic vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, so hieher gehören aufzulösen, daher wir um dieses in ein größeres Licht zu setzen einige dergleichen Fragen hier vorlegen und die Auflösung derselben beyfügen wollen.

213.

I. Frage: Man suche eine Zahl, daß wenn man darzu 1 sowohl addirt oder auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Setzt man die gesuchte Zahl = x, so muß sowohl x + 1 als auch x – 1 ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man x + 1 = pp, so wird x = pp – 1 und x – 1 = pp – 2, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man setze, die Wurzel davon sey p – q, so wird pp – 2 = pp – 2pq + qq, wo sich die pp aufheben und daraus gefunden wird $p = \frac{qq + 2}{2q}$; daraus man ferner erhält

hält $x = \frac{q^4 + 4}{4qq}$: wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze daher $q = \frac{r}{s}$, so erhalten wir $x = \frac{r^4 + 4s^4}{4rrss}$ wovon wir etliche kleinere Werthe anzeigen wollen.

wenn	r = 1	2	1	3
und	s = 1	1	2	1
so wird	$x = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{1}\frac{5}{6}$	$\frac{8}{3}\frac{5}{6}$

214.

II. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wenn man dazu 2 beliebige Zahlen als z. E. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Es müssen also diese zwey Formeln $x + 4$ und $x + 7$ Quadrate werden; man setze daher für die erstere $x + 4 = pp$, so wird $x = pp - 4$, die andere Formel aber wird $x + 7 = pp + 3$, welche auch ein Quadrat seyn muß. Man setze daher die Wurzel davon $= p + q$, so wird $pp + 3 = pp + 2pq + qq$, woraus gefunden wird $p = \frac{3 - qq}{2q}$, folglich $x = \frac{9 - 22qq + q^4}{4qq}$.

Setzen wir für q einen Bruch als $\frac{r}{s}$, so bekommen wir

$x = \frac{9s^4 - 22rrss + r^4}{4rrss}$, wo man für r und s alle beliebige ganze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r = 1$ und $s = 1$, so wird $x = -3$, und daraus wird $x + 4 = 1$ und $x + 7 = 4$. Will man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s = 2$ und $r = 1$, da bekommt man $x = \frac{5}{1}\frac{7}{6}$; woraus wird $x + 4 = \frac{1}{1}\frac{2}{6}\frac{1}{}$ und $x + 7 = \frac{1}{1}\frac{6}{6}\frac{9}{}$: will man ferner setzen $s = 3$ und $r = 1$, so bekommt man $x = \frac{1}{9}\frac{3}{}\frac{3}{}$,

woraus

woraus $x + 4 = \frac{169}{9}$ und $x + 7 = \frac{196}{9}$. Soll das letzte Glied das mittlere überwiegen, so setze man $r = 5$ und $s = 1$, da wird $x = \frac{21}{25}$, und daraus $x + 4 = \frac{121}{25}$ und $x + 7 = \frac{196}{25}$.

215.

III. Frage: Man suche einen solchen Bruch x, daß wenn man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Da diese beyden Formeln $1 + x$ und $1 - x$ Quadrate seyn sollen, so setze man für die erstere $1 + x = pp$, da wird $x = pp - 1$ und die andere Formel $1 - x = 2 - pp$, welche ein Quadrat seyn soll. Da nun weder das erste noch letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, da solches geschieht, ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nämlich $p = 1$, deswegen setze man $p = 1 - q$, also daß $x = qq - 2q$, so wird unsere Formel $2 - pp = 1 + 2q - qq$, davon setze man die Wurzel $= 1 - qr$, so bekommt man $1 + 2q - qq = 1 - 2qr + qqrr$; hieraus

$$2 - q = -2r + qrr \text{ und } q = \frac{2r + 2}{rr + 1};$$ hieraus wird

$$x = \frac{4r - 4r^3}{(rr+1)^2},$$ weil r ein Bruch ist, so setze man

$$r = \frac{t}{u}, \text{ so wird } x = \frac{4tu^3 - 4t^3u}{(tt+uu)^2} = \frac{4tu(uu - tt)}{(tt + uu)^2};$$

also muß u größer seyn als t.

Man setze demnach $u = 2$ und $t = 1$, so wird $x = \frac{24}{25}$; setzt man $u = 3$ und $t = 2$, so wird $x = \frac{120}{169}$, und daraus $1 + x = \frac{289}{169}$ und $1 - x = \frac{49}{169}$, welche beyde Quadrate sind.

216.

216.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen x, welche sowohl zu 10 addirt als von 10 subtrahirt, Quadrate hervorbringen?

Es müssen also diese Formeln $10 + x$ und $10 - x$ Quadrate seyn, welches nach der vorigen Weise geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, so bedenke man, daß auch das Product dieser Formel ein Quadrat seyn müsse, nämlich $100 - xx$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $= 10 - px$, so wird $100 - xx = 100 - 20px + ppxx$ und also $x = \frac{20p}{pp+1}$: hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat werde, nicht aber eine jede besonders. Wenn aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch eines seyn; nun aber wird die erste $10 + x = \frac{10pp + 20p + 10}{pp+1}$

$= \frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$; und weil $pp + 2p + 1$ schon ein Quadrat ist, so muß noch dieser Bruch $\frac{10}{pp+1}$ ein Quadrat seyn, folglich auch dieser $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Es ist also nur nöthig, daß die Zahl $10pp + 10$ ein Quadrat werde, wo wiederum ein Fall, da es geschieht, errathen werden muß. Dieser ist, wenn $p = 3$ und deswegen setze man $p = 3 + q$, so bekommt man $100 + 60q + 10qq$; davon setze man die Wurzel $10 + qt$, so wird $100 + 60q + 10qq = 100 + 20qt + qqtt$

daraus $q = \frac{60 - 20t}{tt - 10}$, daraus $p = 3 + q$, und $x = \frac{20p}{pp+1}$.

Setzt

Setzt man $^3t = 3$, so wird $q = 0$ und $p = 3$ folglich $x = 6$, daher wird $10 + x = 16$ und $10 - x = 4$. Es sey aber $t = 1$, so wird $q = -\frac{40}{9}$ und $p = -\frac{13}{9}$ und $x = -\frac{2}{2}\frac{3}{5}\frac{4}{}$: es ist aber gleich viel zu setzen $x = +\frac{2}{2}\frac{3}{5}\frac{4}{}$, und denn wird $10 + x = \frac{4}{2}\frac{8}{5}\frac{4}{}$ und $10 - x = \frac{1}{2}\frac{6}{5}$, welche beyde Quadrate sind.

217.

Anmerkung: Wollte man diese Frage allgemein machen, und für eine jegliche gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, also daß sowohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werden sollte, so würde die Auflösung öfters unmöglich werden, nämlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe von zwey Quadraten ist. Aber wir haben schon oben gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen von zwey Quadraten, oder in dieser Form $xx + yy$ enthalten sind.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

die übrigen also, welche gleichfalls bis 50 sind:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, nicht können in zwey Quadrate zerlegt werden; so oft also a eine von diesen letztern Zahlen wäre, so oft würde auch die Frage unmöglich seyn.

Um dieses zu zeigen, so laßt uns setzen $a + x = pp$ und $a - x = qq$, und da giebt die Addition $2a = pp + qq$; also daß 2a eine Summe von zwey Quadraten seyn muß, ist aber 2a eine solche Summe, so muß auch a eine solche seyn, wenn daher a keine Summe von zwey Quadraten ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a + x$ und $a - x$ zugleich Quadrate seyn können.

218.

Wenn demnach $a = 3$ wäre, so würde die Frage unmöglich seyn, und das deswegen, weil 3 keine Summe

von

von zwey Quadraten ist: man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmacht; allein dieses ist auch nicht möglich, denn wäre $3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss}$ und man multiplicirte mit qqss, so würde $3qq\,ss = ppss + qqrr$, wo ppss + qqrr eine Summe von zwey Quadraten ist, welche sich durch 3 theilen ließe: wir haben aber oben gesehen, daß eine Summe von zwey Quadraten keine anderen Theiler haben könne, als welche selbst solche Summen sind.

Es lassen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein dieselben sind auch durch 9 theilbar und so gar ein jedes der beyden Quadrate, woraus sie bestehen, weil nämlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, welches hier nicht statt findet: daher dieser Schluß seine Richtigkeit hat, daß wenn eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe von zwey Quadraten ist, solches auch nicht in Brüchen geschehen könne; ist aber die Zahl a in ganzen Zahlen eine Summe von zwey Quadraten, so kann dieselbe auch in Brüchen auf unendlich vielerley Art eine Summe von zwey Quadraten seyn, welches wir zeigen wollen.

219.

V. Frage: Eine Zahl, die eine Summe von zwey Quadraten ist, auf unendlich vielerley Art in eine Summe von zwey andern Quadraten zu zerlegen?

Die vorgegebene Zahl sey demnach ff + gg und man soll zwey andere Quadraten, als xx und yy suchen, deren Summe xx + yy gleich sey der Zahl ff + gg, also daß $xx + yy = ff + gg$. Hier ist nun so gleich klar, daß wenn x größer oder kleiner ist als f, y umgekehrt kleiner oder größer seyn müsse als g. Man setze daher $x = f + pz$ und $y = g - qz$, so wird

$ff + 2fpz + ppzz + gg - 2gqz + qqzz = ff + gg$, wo sich die ff und gg aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen lassen. Daher wird $2fp + ppz - 2gq + qqz = 0$ oder $ppz + qqz = 2gq - 2fp$, und also $z = \frac{2gq - 2fp}{pp + qq}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden $x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq}$ und $y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}$, wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sey die gegebene Zahl 2, also daß $f = 1$ und $g = 1$ so wird $xx + yy = 2$, wenn $x = \frac{2pq + qq - pp}{pp + qq}$ und $y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq}$: setzt man $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

220.

VI. Frage: Wenn die Zahl a eine Summe von zwey Quadraten ist, solche Zahlen x zu finden, daß so wohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werde?

Es sey die Zahl $a = 13 = 9 + 4$, und man setze $13 + x = pp$ und $13 - x = qq$, so giebt erstlich die Addition $26 = pp + qq$, die Subtraction, aber $2x = pp - qq$: also müssen p und q so beschaffen seyn, daß $pp + qq$ der Zahl 26 gleich werde, welche auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nämlich $25 + 1$, folglich muß diese Zahl 26 in zwey Quadrate zerlegt werden, wovon das größere für pp, das kleinere aber für qq genommen wird. Hieraus bekommt man erstlich $p = 5$ und $q = 1$ und daraus wird $x = 12$; hernach aber kann aus dem obigen die Zahl 26 noch auf unend-

lich vielerley Art in zwey Quadrate aufgelöst werden. Denn weil $f = 5$ und $g = 1$, wenn wir in den obigen Formeln anstatt der Buchstaben p und q schreiben t und u, vor x und y aber die Buchstaben p und q, so finden wir $p = \frac{2tu + 5(uu - tt)}{tt + uu}$ und $q = \frac{10tu + tt - uu}{tt + uu}$.

Nimmt man nun für t und u Zahlen nach Belieben an, und bestimmt daraus die Buchstaben p und q, so erhält man die gesuchte Zahl $x = \frac{pp - qq}{2}$.

Es sey z. E. $t = 2$ und $u = 1$, so wird $p = \frac{11}{5}$ und $q = \frac{23}{5}$; und daher $pp - qq = \frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

221.

Um aber diese Frage allgemein aufzulösen, so sey die gegebene Zahl $a = cc + dd$, die gesuchte aber $= z$, also daß diese Formeln $a + z$ und $a - z$ Quadrate werden sollten.

Nun setze man $a + z = xx$ und $a - z = yy$, so wird erstlich $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$, und hernach $2z = xx - yy$. Es müssen also die Quadrate xx und yy so beschaffen seyn, daß $xx + yy = 2(cc + dd)$, wo $2(cc + dd)$ auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nämlich $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Man setze Kürze halber $c + d = f$ und $c - d = g$: also daß seyn muß $xx + yy = ff + gg$, dieses geschieht aber aus dem obigen, wenn man nimmt $x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq}$ und $y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}$, hieraus bekommt man die leichteste Auflösung, wenn man nimmt $p = 1$ und $q = 1$, denn daraus wird $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$ und $y = f =$

$= f = c + d$, und hieraus folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar $cc + dd + 2cd = (c+d)^2$ und $cc + dd - 2cd = (c-d)^2$. Um eine andere Auflösung zu finden, so sey $p = 2$ und $q = 1$, da wird $x = \frac{-c-7d}{5}$, und $y = \frac{7c+d}{5}$, wo so wohl c und d, als x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x grösser seyn soll als y, so nehme man d negativ, und da wird $x = \frac{c+7d}{5}$ und $y = \frac{7c-d}{5}$. Hieraus folgt $z = \frac{24dd+14cd-24cc}{25}$, welcher Werth zu $a = cc + dd$ addirt giebt $\frac{cc+14cd+4cdd}{25}$, wovon die Quadratwurzel ist $\frac{c+7d}{5}$. Subtrahirt man aber z von a, so bleibt $\frac{49cc-14cd+dd}{25}$, wovon die Quadratwurzel ist $\frac{7c-d}{5}$; jene ist nämlich x, diese aber y.

222.

VII. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wenn so wohl zu derselben selbst als zu ihrem Quadrat xx, eins addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also diese beyde Formeln $x + 1$ und $xx + 1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze daher für die erste $x + 1 = pp$, so wird $x = pp - 1$, und die zweyte Formel $xx + 1 = p^4 - 2pp + 2$, welche Formel ein Quadrat seyn soll: dieselbe aber ist von der Art, daß keine Auflösung zu finden, wofern nicht schon ein

Fall bekannt ist; ein solcher Fall aber fällt so gleich in die Augen, nämlich wo $p = 1$. Man setze daher $p = 1 + q$, so wird $xx + 1 = 1 + 4qq + 4q^3 + q^4$, welches auf vielerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann.

I. Man setze erstlich die Wurzel davon $1 + qq$, so wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 2qq + q^4$, daraus wird $4q + 4qq = 2q$ oder $4 + 4q = 2$ und $q = -\frac{1}{2}$, folglich $p = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{3}{4}$.

II. Setzt man die Wurzel $1 - qq$, so wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 2qq + q^4$, und daher $q = -\frac{3}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$, hieraus $x = -\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1 + 2q + qq$, damit sich die ersten und die zwey letzten Glieder aufheben, so wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6qq + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ und $p = -1$, daher $x = 0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel setzen $1 - 2q - qq$, so wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2qq + 4q^3 + q^4$, daraus wird $q = -2$ wie vorher.

V. Damit die zwey ersten Glieder einander aufheben, so sey die Wurzel $1 + 2qq$, da wird $1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4qq + 4q^4$, und daraus $q = \frac{4}{3}$ und $p = \frac{7}{3}$; folglich $x = \frac{40}{9}$, woraus folgt $x + 1 = \frac{49}{9} = (\frac{7}{3})^2$ und $xx + 1 = \frac{1681}{81} = (\frac{41}{9})^2$.

Wollte man noch mehr Werthe für q finden, so müßte man einen von diesen hier gefundenen z. E. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner setzen $q = -\frac{1}{2} + r$; daraus aber würde $p = \frac{1}{2} + r$; $pp = \frac{1}{4} + r + rr$ und $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4$, folglich unsere Formel $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}rr$

$-\frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4$, welche ein Quadrat seyn soll, und daher auch mit 16 multiplicirt, nämlich $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4$. Davon setze man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4rr$, also daß $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr \pm 8 + ffrr$.

$fr^3 + 16r^4$. Da nun die ersten und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht, wenn $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$; alsdenn geben die übrigen Glieder durch rr dividirt $-8 + 32r = \pm 40 + ff \pm 8fr$. Für das obere Zeichen hat man

$$-8 + 32r = 40 + ff + 8fr, \text{ und daraus } r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}.$$

Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = \frac{216}{320}$, folglich $p = \frac{361}{320}$ und $x = \frac{576}{400}$, daraus wird $x + 1 = (\frac{361}{320})^2$, und $xx + 1 = (\frac{689}{400})^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8 + 32r = -40 + ff - 8fr$, und daraus

$$r = \frac{ff - 32}{32 + 8f}.$$

Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = \frac{361}{320}$, woraus die vorige Gleichung entspringt.

III. Es sey die Wurzel $4rr + 4r \pm 5$, also daß $16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 = 16r^4 + 32r^3 \pm 40rr \pm 40r + 25$: wo die zwey ersten und $+16rr$ die ganz letzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt geben $-8r - 24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, oder $-24r - 24 = \pm 40r \pm 40$. Wenn das obere Zeichen gilt, so wird $-24r - 24 = 40r + 40$, oder $0 = 64r + 64$, oder $0 = r + 1$, das ist $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon gedacht haben; und eben derselbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

IV. Man setze die Wurzel $5 + fr + grr$ und bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen. Da nun $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr + 10grr + 2fgr^3 + ggr^4 + ffrr$

so wird erstlich $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$,

ferner $-8 = 10g + ff$, und also $g = \frac{-8-ff}{10}$,

oder $g = -\frac{344}{50} = -\frac{172}{125}$; die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt geben $32 + 16r = 2fg + ggr$ und daraus $r = \frac{2fg-32}{16-gg}$. Hier wird der

Zehler $2fg-32 = \frac{+24.172+32.625}{5.125} = \frac{-32.496}{625}$,

oder dieser Zehler $= \frac{-16.32.31}{625}$; der Nenner aber

giebt $16 - gg = (4-g)(4+g) = \frac{328}{125}\frac{672}{125}$, oder

$16 - gg = \frac{8.32.41.21}{25.625}$; daraus wird $r = -\frac{1550}{861}$,

hieraus $p = -\frac{2730}{1722}$, und hieraus wird ein neuer Werth für x, nämlich $x = pp - 1$, gefunden.

223.

VIII. Frage: Zu drey gegebenen Zahlen a, b und c eine solche Zahl x zu finden, welche zu einer jeden derselben addirt ein Quadrat hervorbringe?

Es müssen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden, nämlich $x + a$, $x + b$, und $x + c$.

Man setze für die erstere $x + a = zz$, also daß $x = zz - a$, so werden die beyden andern Formeln $zz + b - a$ und $zz + c - a$, wovon eine jede ein Quadrat seyn soll.

Hier-

Hiervon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil solches sehr öfters unmöglich ist, und die Möglichkeit beruhet einzig und allein auf der Beschaffenheit der beyden Zahlen $b - a$, und $c - a$. Denn wäre z. E. $b - a = 1$ und $c - a = -1$, das ist $b = a + 1$ und $c = a - 1$, so müßten $zz + 1$ und $zz - 1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch seyn.

Man setze daher $z = \frac{p}{q}$, so würden diese zwey Formeln Quadrate seyn müssen, $pp + qq$ und $pp - qq$, folglich müßte auch ihr Product, nämlich $p^4 - q^4$, ein Quadrat seyn, daß aber dieses nicht möglich sey ist oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b - a = 2$, und $c - a = -2$, das ist $b = a + 2$ und $c = a - 2$, so müßten, wenn man wiederum setzte $z = \frac{p}{q}$, diese zwey Formeln $pp + 2qq$ und $pp - 2qq$ Quadrate werden, folglich auch ihr Product $p^4 - 4q^4$, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b - a = m$ und $c - a = n$, ferner auch $z = \frac{p}{q}$, so müssen diese Formeln Quadrate seyn $pp + mqq$ und $pp + nqq$; welches wie wir eben gesehen unmöglich ist, wenn entweder $m = +1$ und $n = -1$, oder wenn $m = +2$ und $n = -2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich, wenn $m = ff$ und $n = -ff$. Denn alsdenn würde das Product derselben $p^4 - f^4 q^4$ eine Differenz von zwey Biquadraten seyn, welche niemals ein Quadrat werden kann.

Eben so, wenn $m = 2ff$ und $n = -2ff$, so können auch diese Formeln $pp + 2ffqq$ und $pp - 2ffqq$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Product $p^4 - 4f^4q^4$ auch ein Quadrat seyn müßte; folglich wenn man setzt

$kq = r$, diese Formel $p^4 - 4r^4$, wovon die unmöglichkeit auch oben gezeigt worden.

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, also daß diese Formeln $pp + qq$ und $pp + 2qq$ Quadrate seyn müßten, so setze man $pp + qq = rr$ und $pp + 2qq = ss$; da wird aus der ersteren $pp = rr - qq$, und also die andere $rr + qq = ss$: daher müßte so wohl $rr - qq$ als $rr + qq$ ein Quadrat seyn; und auch ihr Product $r^4 - q^4$ müßte ein Quadrat seyn, welches unmöglich ist.

Hieraus sieht man nun zur Gnüge, daß es nicht leicht ist, solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich werde. Das einige Mittel solche Werthe für m und n zu finden ist, daß man dergleichen Fälle errathe, oder solcher Gestalt ausfündig mache.

Man setzt $ff + mgg = hh$ und $ff + ngg = kk$, so bekommt man aus der erstern $m = \frac{hh - ff}{gg}$ und aus der andern $n = \frac{kk - ff}{gg}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so bekommt man für m und n solche Werthe, da die Auflösung möglich ist.

Es sey z. E. $h = 3$, $k = 5$, $f = 1$ und $g = 2$; so wird $m = 2$ und $n = 6$. Anjetzt sind wir versichert, daß es möglich sey die zwey Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadraten zu machen, weil solches geschieht, wenn $p = 1$ und $q = 2$. Die erste aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat wenn $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; denn da wird $pp + 2qq = (rr + 2ss)^2$. Die andere Formel aber wird alsdenn $pp + 6qq = r^4 + 20\,rr\,ss + 4s^4$, wovon ein Fall bekannt ist, da dieselbe ein Quadrat wird, nämlich wenn $p = 1$ und $q = 2$,

und

und welches geschieht wenn $r = 1$ und $s = 1$, oder wenn überhaupt $r = s$; denn da wird unsere Formel $25 s^4$. Da wir nun diesen Fall wissen, so setzen wir $r = s + t$, so wird $rr = ss + 2st + tt$ und $r^4 = s^4 + 4s^3 t + 6ss\,tt + 4st^3 + t^4$; daher unsere Formel seyn wird $25s^4 + 44s^3 t + 26\,ss\,tt + 4st^3 + t^4$, davon sey die Wurzel $5ss + fst + tt$, wovon das Quadrat ist $25s^4 + 10fs^3 t + 10\,ss\,tt + 2fst^3 + ffsstt + t^4$, wo sich die ersten und letzten Glieder von selbst aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die letzten ohne eines aufheben, welches geschieht, wenn $4 = 2f$ und $f = 2$; alsdenn geben die übrigen durch sst dividirt diese Gleichung $44s + 26t = 10fs + 10t + fft = 20s + 14t$, oder $2s = -t$ und $\frac{s}{t} = -\frac{1}{2}$, daher wird $s = -1$ und $t = 2$, oder $t = -2s$, folglich $r = -s$ und $rr = ss$, welches der bekannte Fall selbst ist.

Man nehme f so an, daß sich die zweyten Glieder aufheben, welches geschieht, wenn $44 = 10f$, oder $f = \frac{22}{5}$; da denn die übrigen Glieder durch stt dividirt geben $26s + 4t = 10s + ffs + 2ft$, das ist $-\frac{8}{2}\frac{4}{5}s = \frac{24}{5}t$, folglich $t = -\frac{7}{10}s$ und also $r = s + t = \frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$: daher $r = 3$, und $s = 10$: hieraus bekommen wir $p = 2ss - rr = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unsere Formeln werden: $pp + 2qq = 43681 = 209^2$, und $pp + 6qq = 58081 = 241^2$.

224.

Anmerkung: Dergleichen Zahlen für m und n, da sich unsere Formeln zu Quadraten machen lassen, können nach der obigen Art noch mehr gefunden werden.

Es ist aber zu merken, daß die Verhältniß dieser Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es sey diese Verhältniß wie a zu b, und man setze m = az und n = bz, so kommt es nun darauf an, wie man z bestimmen soll, daß diese beyde Formeln pp + azqq und pp + bzqq zu Quadraten gemacht werden können? welches wir in der folgenden Aufgabe zeigen wollen.

225.

IX. Frage: Wenn a und b gegebene Zahlen sind; die Zahl z zu finden, daß sich diese beyde Formeln pp + azqq und pp + bzqq zu Quadraten machen lassen, und zugleich die kleinsten Werthe für p und q zu bestimmen?

Man setze pp + azqq = rr und pp + bzqq = ss, und man multiplicire die erstere mit b die andere aber mit a, so giebt die Differenz derselben diese Gleichung

$(b-a)\,pp = brr - ass$ und also $pp = \frac{brr-ass}{b-a}$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß. Da nun solches geschieht, wenn $r = s$, so setze man um die Brüche weg zu bringen $r = s + (b-a)\,t$, so wird $pp = \frac{brr-ass}{b-a} = \frac{bss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2 tt - ass}{b-a}$

$= \frac{(b-a)ss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2 tt}{b-a} = ss + 2bst + b(b-a)tt$.

Nun setze man $p = s + \frac{x}{y}t$, so wird

$pp = ss + \frac{2x}{y}.st + \frac{xx}{yy}tt = ss + 2bst + b(b-a)tt$;

wo sich die ss aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit yy multiplicirt geben; $2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx$, daraus $t = \frac{2sxy - 2bsyy}{b(b-a)yy - xx}$,

daher

daher $\frac{t}{s} \frac{2xy - 2byy}{b(b-a)yy-xx}$. Hieraus bekommt man t= 2xy−2byy und s = b (b − a) yy−xx; ferner r = a (b−a) xy − b (b−a) yy − xx, und daraus p = s + $\frac{x}{y}$. t= b (b−a) yy + xx − 2bxy = (x − by)² − abyy. Da wir nun p nebst r und s gefunden haben, so ist noch übrig z zu suchen. Man subtrahire zu diesem Ende die erste Gleichung pp + a z q q = rr von der andern pp + b z qq = ss, so giebt der Rest z qq (b−a) = ss − rr = (s+r). (s − r). Da nun s+r = 2(b−a) xy − 2xx und s−r = 2b (b−a) yy −2(b−a) xy; oder s+r=2x((b − a) y−x) und s − r = 2 (b − a) y (by − x), so wird (b − a) z qq=2 x ((b−a) y−x). 2(b−a) y (by−x) oder z qq = 2x ((b − a) y−x). 2y (by−x) oder z qq = 4xy ((b − a) y −x) (by− x); folglich

$$z = \frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qq}.$$

Daher für qq das größte Quadrat genommen werden muß, dadurch sich der Zähler theilen läßt: für p aber haben wir schon gefunden p = b (b − a) yy + xx − 2bxy = (x−by)² − abyy, woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wenn man setzet: x=v+by oder x−by=v: denn da wird p= vv − abyy, und z= $\frac{4(v+by).y.v(v+ay)}{qq}$ oder

$$z = \frac{4vy(v+ay)(v+ay)}{qq};$$

wo die Zahlen v und y nach Belieben genommen werden können, und alsdenn findet man erstlich qq, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, so in dem Zähler enthalten ist, woraus sich so denn z ergiebt; da denn m = a z und n = bz, endlich aber

p = vv

$p = vv - abyy$ wird; und hieraus bekommt man die gesuchten Formeln.

I. $pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v + ay)(v + by)$, welche ein Quadrat ist, davon die Wurzel $r = \pm vv - 2avy - abyy$ ist.

II. Die zweyte Formel aber wird $pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy(v + ay)(v + by)$, welches auch ein Quadrat ist, davon die Wurzel $s = \pm vv - 2bvy - abyy$: wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können: dieses wird dienlich seyn mit einigen Exempeln zu erläutern.

226.

I. Exempel: Es sey $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z also daß diese zwey Formeln $pp - zqq$ und $pp + zqq$ Quadrate werden können? die erstere nämlich $= rr$, und die andere $= ss$.

Hier wird $p = vv + yy$ und man hat also um z zu finden diese Formel zu betrachten $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$, da wir denn für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folget.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
v−y	1	1	3	1	7	7
v+y	3	5	5	9	25	9
zqq	4.6	4.30	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
qq	4	4	16	9.16	36.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus

woraus folgende Formeln aufgelöset und zu Quadraten gemacht werden können.

I. Können diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden $pp - 6qq$ und $pp + 6qq$, welches geschieht wenn $p = 5$ und $q = 2$. Denn da wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden $pp - 30qq$ und $pp + 30qq$, welches geschieht wenn $p = 13$ und $q = 2$; denn da wird die erste $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 15qq$ und $pp + 15qq$, welches geschieht wenn $p = 17$ und $q = 4$, denn da wird die erste $= 289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 5qq$ und $pp + 5qq$, welches geschieht wenn $p = 41$ und $q = 12$, denn da wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 7qq$ und $pp + 7qq$, welches geschieht wenn $p = 337$ und $q = 120$; denn da wird die erste $113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, und die andere $113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

VI. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 14qq$ und $pp + 14qq$: welches geschieht wenn $p = 65$ und $q = 12$: denn da wird die erste $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$ und die andere $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

227.

II. Exempel: Wenn die beyden Zahlen m und n sich verhalten wie 1 : 2, das ist wenn a = 1 und b = 2, also m = z und n = 2z, so sollen die Werthe für z gefunden werden, so daß diese Formeln pp + zqq und pp + 2zqq zu Quadraten gemacht werden können.

Man hat nicht nöthig hier die obigen zu allgemeinen Formeln zu gebrauchen, sondern dieses Exempel kann sogleich auf das vorige gebracht werden. Denn setzt man pp + zqq = rr und pp + 2zqq = ss, so bekommt man aus der erstern pp = rr − zqq welcher Werth für pp in der zweyten gesetzt giebt rr + zqq = ss; folglich müssen diese zwey Formeln rr − zqq und rr + zqq zu Quadraten gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Exempels ist. Also hat man auch hier für z folgende Werthe 6, 30, 15, 5, 7, 14, ꝛc.

Eine solche Verwandelung kann auch allgemein angestellt werden. Wenn wir annehmen, daß diese zwey Formeln pp + mqq und pp + nqq zu Quadraten gemacht werden können, so laßt uns setzen pp + mqq = rr und pp + nqq = ss, so giebt die erstere pp = rr − mqq, und also die zweyte ss = rr − mqq + nqq oder rr + (n − m) qq = ss; wenn daher die ersteren Formeln möglich sind, so sind auch diese rr − mqq und rr + (n − m) qq möglich; und da wir m und n unter sich verwechseln können, so sind auch diese möglich rr − nqq und rr + (m − n) qq: sind aber jene Formeln unmöglich so sind auch diese unmöglich.

228.

III. Exempel: Es seyn die Zahlen m und n wie 1 : 3, oder a = 1 und b = 3, also m = z und n = 3z,

so

so daß diese Formeln $pp + zqq$ und $pp + 3zqq$ zu Quadraten gemacht werden sollen.

Weil hier $a = 1$ und $b = 3$, so wird die Sache möglich so oft $zqq = 4vy(v+y)(v+3y)$, und $p = vv - 3yy$. Man nehme daher für v und y folgende Werthe.

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v+y$	2	5	5	9	25
$v+3y$	4	9	7	25	43
zqq	16.2	4.9.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
qq	16	4.9	4.4	4.9.254.	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für $z = 2$, daraus wir auf zweyerley Art diese Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadraten machen können, erstlich geschieht dieses wenn $p = 2$ und $q = 4$, folglich auch wenn $p = 1$ und $q = 2$; denn da wird $pp + 2qq = 9$ und $pp + 6qq = 25$. Hernach geschieht es auch wenn $p = 191$ und $q = 60$, denn da wird $pp + 2qq = (209)^2$ und $pp + 6qq = (241)^2$. Ob aber nicht auch seyn könnte $z = 1$? welches geschehen würde wenn für zqq ein Quadrat heraus käme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun diese Frage erörtern, ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

229.

Man soll also untersuchen ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden

den können oder nicht? Man setze $pp + qq = rr$ und $pp + 3qq = ss$, so sind folgende Puncte zu bedenken:

I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter sich angesehen werden; denn wenn sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wenn p und q dadurch getheilt würde.

II. Kann p keine gerade Zahl seyn; denn da würde q ungerade, und also die zweyte Formel eine Zahl von dieser Art $4n + 3$ seyn, welche kein Quadrat werden kann; daher ist p nothwendig ungerade, und pp eine Zahl von dieser Art $8n + 1$.

III. Da nun p ungerade ist, so muß aus der ersten Form q nicht nur gerade, sondern sogar durch 4 theilbar seyn, damit qq eine Zahl werde von dieser Art $16n$; und $pp + qq$ von dieser Art $8n + 1$.

IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar seyn; denn da würde pp sich durch 9 theilen lassen qq aber nicht, folglich $3qq$ nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch $pp + 3qq$ durch 3 nicht aber durch 9, und demnach kein Quadrat seyn; folglich kann die Zahl p nicht durch 3 theilbar seyn, daher pp von der Art $3n + 1$ seyn wird.

V. Da sich p nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich q durch 3 theilen lassen: denn wäre q nicht durch 3 theilbar, so wäre qq eine Zahl von dieser Art $3n + 1$, und daher $pp + qq$ von dieser Art $3n + 2$, welche kein Quadrat seyn kann: folglich muß q durch 3 theilbar seyn.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar seyn; denn wäre dieses, so wäre q nicht durch 5 theilbar und

qq eine Zahl von der Art $5n+1$ oder $5n+4$, also $3qq$ eine Zahl von der Art $5n+3$ oder $5n+2$, und von welcher Art auch $pp+3qq$ seyn würde, also könnte diese Formel kein Quadrat seyn; daher denn p nothwendig nicht durch 5 theilbar seyn kann, und also pp eine Zahl von der Art $5n+1$ oder $5n+4$ seyn muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich q durch 5 theilen lasse oder nicht? Wäre q nicht theilbar durch 5, so wäre qq von dieser Art $5n+2$ oder $5n+3$, wie wir gesehen haben, und da pp entweder $5n+1$ oder $5n+4$, so würde $pp+3qq$ seyn entweder $5n+1$ oder $5n+4$ eben wie pp; es sey $pp=5n+1$, so müßte seyn $qq=5n+4$, weil sonst $pp+qq$ kein Quadrat seyn könnte: alsdenn aber wäre $3qq=5n+2$, und $pp+3qq=5n+3$; welches kein Quadrat seyn kann; wäre aber $pp=5n+4$, so müßte seyn $qq=5n+1$ und $3qq=5n+3$ folglich $pp+3qq=5n+2$, welches auch kein Quadrat seyn kann: woraus folget daß qq durch 5 theilbar seyn müsse.

VIII. Da nun q erstlich durch 4, hernach durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar seyn muß, so muß q eine solche Zahl seyn 4. 3. 5 m, oder $q=60m$; daher unsere Formeln seyn würden $pp+3600mm=rr$ und $pp+10800mm=ss$: da denn die erste von der zweyten subtrahirt giebt $7200mm=ss-rr=(s+r)(s-r)$; also daß $s+r$ und $s-r$ Factores seyn müssen von $7200mm$: wobey zu merken daß sowohl s als r ungerade Zahlen seyn müssen, und dabey unter sich untheilbar.

IX. Es sey demnach 7200 mm = 4 f g oder die Factores davon 2 f und 2 g, und man setze s + r = 2 f und s − r = 2 g, so wird s = f + g, und r = f − g; da denn f und g unter sich untheilbar seyn müssen, und die eine gerade und die andere ungerade. Da nun fg = 1800 mm, so muß man 1800 mm in zwey Factores zerlegen, deren einer gerade, der andere aber ungerade sey, beyde aber unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

X. Ferner ist auch zu merken, daß da rr = pp + qq und also r ein Theiler von pp + qq, die Zahl r = f − g auch eine Summe von zwey Quadraten seyn, und weil dieselbe ungerade, in der Form 4 n + 1 enthalten seyn müsse.

XI. Nehmen wir erstlich an m = 1, so wird fg = 1800 = 8. 9. 25, woraus folgende Zerlegungen entspringen; f = 1800 und g = 1, oder f = 200 und g = 9, oder f = 72 und g = 25, oder f = 225 und g = 8; aus dem ersten wird r = f − g = 1799 = 4 n + 3; nach der andern würde r = f − g = 191 = 4 n + 3; nach der dritten würde r = f − g = 47 = 4 n + 3; nach der vierten aber r = f − g = 217 = 4 n + 1; daher die drey ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupt schließen kann, daß der größere Factor ungerade, der kleinere aber gerade seyn müsse; aber hier kann auch der Werth r = 217 nicht statt finden, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten ist.

XII. Nimmt man m = 2, so wird fg = 7200 = 32. 225, daher nimmt man f = 225 und g = 32, also daß r = f − g = 193, welche Zahl wohl eine Summe von zwey Quadraten ist und also verdienet probirt zu werden: da nun q = 120 und

r = 193,

r = 193, so wird weil pp = rr − pq = (r + q).(r − q), also r + q = 313 und r − q = 73, also sieht man wohl daß für pp kein Quadrat heraus komme, weil diese Factoren nicht Quadrate sind. Wollte man sich die Mühe geben für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde doch alle Arbeit vergebens seyn, wie wir noch zeigen wollen.

230.

Lehrsatz. Es ist nicht möglich, daß diese zwey Formeln pp + qq und pp + 3qq zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere gewiß keines.

Welches also bewiesen wird.

Da p ungerade und q gerade ist, wie wir gesehen haben, so kann pp + qq nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn q = 2 rs und p = rr − ss; die andere aber pp + 3qq kann nicht anders ein Quadrat seyn, als wenn q = 2tu und p = tt − 3uu oder p = 3uu − tt. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Product seyn muß, so setze man für beyde q = 2abcd und nehme für die erste r = ab und s = cd; für die andere aber t = ac und u = bd, so wird für die erstere p = aa bb − cc dd, für die andere aber p = aa cc − 3 bb dd, oder p = 3 bb dd − aa cc, welche beyde Werthe einerley seyn müssen; daher wir bekommen entweder aa bb − cc dd = aa cc − 3 bb dd, oder aa bb − cc dd = 3 bb dd − aa cc: wobey zu merken daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q. Wir müssen also einen jeden dieser beyden Fälle besonders erwegen; aus dem erstern erhalten wir aa bb + 3 bb dd = aa cc + cc dd oder bb (aa + 3dd) = cc (aa + dd), daraus wird $\frac{bb}{cc} = \frac{aa + dd}{aa + 3dd}$, welcher Bruch ein Quadrat

seyn muß. Hier kann aber der Zehler und Nenner keinen andern gemeinen Theiler haben als 2, weil die Differenz darzwischen 2dd ist. Sollte daher 2 ein gemeiner Theiler seyn, so müßte sowohl $\frac{aa+dd}{2}$ als auch $\frac{aa+3dd}{2}$ ein Quadrat seyn, beyde Zahlen aber a und d sind in diesem Fall ungerade und also ihre Quadrate von der Form 8n + 1, daher die letztere Formel $\frac{aa+3dd}{2}$ diese Form 4n + 2 haben wird und kein Quadrat seyn kann: folglich kann 2 kein gemeiner Theiler seyn, sondern der Zehler aa + dd und der Nenner aa + 3 dd sind unter sich untheilbar; daher ein jeder für sich ein Quadrat seyn muß. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß wenn die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen gleichen Formeln Quadrate seyn würden, und so könnte man immer auf kleinere Zahlen kommen. Da es nun in kleinern Zahlen dergleichen nicht giebt, so kann es auch nicht in den größten Zahlen dergleichen geben.

Dieser Schluß ist aber nur in sofern richtig, als auch der obige zweyte Fall aa bb − cc dd = 3 bb dd − aa cc auf dergleichen führt: hieraus aber wird aa bb + aa cc = 3 bb dd + cc dd, oder aa (bb + cc) = dd (3 bb + cc), und daher $\frac{aa}{dd} = \frac{bb+cc}{3bb+cc} = \frac{cc+bb}{cc+3bb}$, welcher Bruch ein Quadrat seyn muß, also daß dadurch der vorige Schluß vollkommen bestätiget wird; indem wenn es in den größten Zahlen solche Fälle gäbe, da pp + qq und pp + 3 qq Quadrate wären, auch dergleichen in den kleinsten Zahlen vorhanden seyn müßten, welches doch nicht statt findet.

231.

231.

XII. Frage: Man soll drey solche Zahlen finden x, y und z, so daß wenn je zwey mit einander multiplicirt werden und zum Product 1 addirt wird, ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy+1$; II. $xz+1$; III. $yz+1$:

Man setze vor die beyden letztern $xz+1=pp$ und $yz+1=qq$, so findet man daraus $x=\frac{pp-1}{z}$ und $y=\frac{qq-1}{z}$, woraus die erste Formel wird $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz}+1$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch mit zz multiplicirt, das ist $(pp-1)(qq-1)+zz$, welche leicht dazu gemacht werden kann. Denn setzt man die Wurzel davon $=z+r$, so bekommt man $(pp-1)(qq-1)=2rz+rr$, und daher $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, wo für p, q und r beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es sey z. E. $r=-pq-1$, so wird $rr=ppqq+2pq+1$ und $z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}=\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2}$, folglich $x=\frac{(pp-1)(2pq+2)}{pq+2pq+qq}=\frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2}$, und $y=\frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}$.

Will man aber ganze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel $xy+1=pp$ und nehme $z=x+y+q$, so wird die zweyte Formel $xx+xy+xq+1=xx+qx+pp$; die dritte aber wird

$xy + yy + qy + 1 = yy + qy + pp$, welche offenbar Quadrate werden, wenn man nimmt $q = \pm 2p$; denn da wird die zweyte $xx \pm 2px + pp$ davon die Wurzel ist $x \pm p$, die dritte aber wird $yy \pm 2py + pp$ davon die Wurzel ist $y \pm p$; daher haben wir diese sehr nette Auflösung: $xy + 1 = pp$ oder $xy = pp - 1$, welches für eine jede Zahl, so für p angenommen wird, leicht geschehen kann; und hernach ist die dritte Zahl auf eine doppelte Art entweder $z = x + y + 2p$ oder $z = x + y - 2p$, welches wir durch folgende Exempel erläutern wollen:

I. Man nehme $p = 3$, so wird $pp - 1 = 8$: nun setze man $x = 2$ und $y = 4$, so wird entweder $z = 12$ oder $z = 0$: und also sind die drey gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.

II. Es sey $p = 4$, so wird $pp - 1 = 15$: nun nehme man $x = 5$, und $y = 3$, so wird $z = 16$ oder $z = 0$: und sind die drey gesuchten Zahlen 3, 5 und 16.

III. Es sey $p = 5$, so wird $pp - 1 = 24$: nun nehme man $x = 3$ und $y = 8$, so wird $z = 21$, oder auch $z = 1$: woraus folgende Zahlen entspringen, entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

232.

XIII. Frage: Man suche drey ganze Zahlen x, y und z, so daß wenn zu dem Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedes mal ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also diese drey Formeln Quadrate werden I. $xy + a$; II. $xz + a$; III. $yz + a$. Nun setze man für die erste $xy + a = pp$, und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte $xx + xy + xq + a = xx + xq + pp$ und die dritte $xy + yy + yq + a = yy + qy + pp$, welche beyde Quadrate werden, wenn

wenn $q = \pm 2p$; also daß $z = x + y \pm 2p$, und daher für z zwey Werthe gefunden werden können.

233.

XIV. Frage: Man verlangt vier ganze Zahlen x, y, z und v, so daß wenn zum Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmal ein Quadrat heraus komme?

Es müssen also folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $xy + a$; II $xz + a$; III. $yz + a$; IV. $xv + a$; V. $yv + a$; VI. $zv + a$. Nun setze man vor die erste $xy + a = pp$ und nehme $z = x + y + 2p$, so wird die zweyte und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v = x + y - 2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und bleibt also nur noch die sechste übrig, welche seyn wird $xx + 2xy + yy - 4pp + a$, welche ein Quadrat seyn muß. Da nun $pp = xy + a$, so wird diese letzte Formel $xx - 2xy + yy - 3a$, folglich müssen noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden I. $xy + a = pp$ und II. $(x - y)^2 - 3a$. Von der letztern sey die Wurzel $(x - y) - q$, so wird $(x - y)^2 - 3a = (x - y)^2 - 2q(x - y) + qq$, und da wird $-3a = -2q(x - y) + qq$ und folglich $x - y = \frac{qq + 3a}{2q}$ oder $x = y + \frac{qq + 3a}{2q}$; hieraus wird $pp = yy + \frac{qq + 3a}{2q} y + a$. Man nehme $p = y + r$, so wird $2ry + rr = \frac{qq + 3a}{2q} y + a$, oder $4qry + 2qrr = (qq + 3a)y + 2aq$, oder $2qrr - 2aq = (qq + 3a)y - 4qry$ und $y = \frac{2qrr - 2aq}{qq + 3a - 4qr}$, wo q und r nach Be-

lieben angenommen werden können, und es also nur darauf ankommt, daß vor x und y ganze Zahlen heraus kommen. Denn weil $p = y + r$ so werden auch z und v ganz seyn. Hier kommt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an, wo die Sache mit den ganzen Zahlen noch einige Schwierigkeit haben könnte; allein es ist zu bemerken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränkt worden, daß den Buchstaben z und v die Werthe $x + y \pm 2p$ gegeben worden, indem dieselben nothwendig noch viel andere haben könnten. Wir wollen zu diesem Ende über diese Frage folgende Betrachtungen anstellen, welche auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

I. Wenn $xy + a$ ein Quadrat seyn soll und also $xy = pp - a$, so müssen die Zahlen x und y immer in dieser ähnlichen Form $rr - ass$ enthalten seyn: wenn wir demnach setzen $x = bb - acc$ und $y = dd - aee$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Ist nun $be - cd = \pm 1$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a$, und also $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Setzen wir nun ferner $z = ff - agg$ und nehmen die Zahlen f und g also an, daß $bg - cf = \pm 1$ und auch $dg - ef = \pm 1$, so werden auch diese Formeln $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Es kommt also nur darauf an, solche Zahlen für b, c und d, e und auch für f und g zu finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drey Paar Buchstaben durch diese Brüche vorstellen $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, welche demnach also beschaffen seyn müssen, daß die Differenz zwischen je zweyen durch einen Bruch aus-

ausgedrückt werde, dessen Zehler = 1. Denn da $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be-dc}{ce}$ so muß dessen Zehler, wie wir gesehen haben, allerdings $\pm$ 1 seyn. Man kann hier einen von diesen Brüchen nach Belieben annehmen, und leicht einen andern dazu finden, so daß die gemeldte Bedingung statt finde.

Es sey z. E. der erste $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, so muß der zweyte $\frac{d}{e}$ diesem beynahe gleich seyn. Es sey $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, so wird die Differenz $z = \frac{1}{6}$. Man kann auch diesen zweyten Bruch aus dem ersten auf eine allgemeine Art bestimmen; denn da $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e-2d}{2e}$, so muß seyn $3e-2d=1$, also $2d=3e-1$ und $d=e+\frac{e-1}{2}$. Man nehme daher $\frac{e-1}{2} = m$ oder $e = 2m+1$, so bekommen wir $d = 3m + 1$ und unser zweyter Bruch wird seyn $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$.

Eben so kann auch zu einem jeglichen ersten Bruch der zweyte gefunden werden, wovon wir folgende Exempel beyfügen wollen.

$\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{8}$	$1\frac{7}{7}$
$\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwey solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es ganz leicht dazu einen dritten $\frac{f}{g}$

zu finden, welcher mit den beyden erstern in gleicher Verhältniß steht. Man darf nur sezen f = b + d und g = c + e, also daß $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, denn da aus den zwey ersten ist be − cd = ∓ 1 so wird $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\mp 1}{cc+ce}$. Eben so wird auch der zweyte weniger den dritten $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be-cd}{ee+ce} = \frac{\mp 1}{ce+ee}$.

V. Hat man nun drey solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus sogleich unsere Frage für drey Zahlen x, y und z auflösen, also daß diese drey Formeln xy + a, xz + a und yz + a Quadrate werden. Denn man darf nur sezen x = bb − a cc, y = dd − a ee und z = ff − a gg. Man nehme z. E. aus der obigen Tafel $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e} = \frac{7}{4}$, so wird $\frac{f}{e} = \frac{12}{7}$; woraus man erhält x = 25 − 9a y = 49 − 16a und z = 144 − 49a; denn da wird xy + a = 1225 − 840a + 144aa = (35 − 12a)²; ferner wird xz + a = 3600 − 2520a + 441aa = (60 − 21a)² und yz + a = 7056 − 4704a + 784aa = (64 − 28a)².

234.

Sollen aber nach dem Inhalt der Frage vier dergleichen Zahlen x, y, z und v gefunden werden, so muß man zu den drey obigen Brüchen noch einen vierten

ten hinzufügen. Es seyn demnach die drey erstere $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, so daß er mit dem zweyten und dritten in dem gehörigen Verhältniß stehe: wenn man nun nimmt $x = bb - aa\,cc$; $y = dd - a\,ee$; $z = ff - a\,g\,g$ und $v = hh - a\,k\,k$, so werden schon folgende Bedingungen erfüllt: I. $xy + a = \square$ (*); II. $xz + a = \square$; III. $yz + a = \square$; IV. $yv + a = \square$; V. $zv + a = \square$; es ist also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbst nicht geschieht, weil der erste Bruch mit dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältnisse steht. Es ist demnach nöthig in den drey ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl m beyzubehalten, und dieselbe also zu bestimmen, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde.

VI. Man nehme demnach aus obiger Tabelle den ersten Fall und setze $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ und $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$, so wird $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x = 9 - 4\,a$ und $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$ also $xv + a =$

$9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2$
$- 9a(4m+4)^2 + 4aa(4m+4)^2$ oder $xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288\,mm + 538m + 243) + 4aa(4m+4)^2$, welche leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann, weil mm mit einem Quadrat multiplicirt ist; wobey wir uns aber nicht aufhalten wollen.

VII. Man

(*) $\square$ deutet hier allenthalben eine Quadratzahl an.

VII. Man kann auch solche Brüche dergleichen nöthig sind auf eine allgemeinere Art anzeigen: denn es sey $\frac{b}{c} = \frac{1}{1}$, $\frac{d}{e} = \frac{nI-1}{n}$; so wird $\frac{f}{g} = \frac{nI+I-1}{n+1}$ und $\frac{g}{k} = \frac{2nI+I-2}{2n+1}$; man setze für den letzten $2n+1 = m$, so wird derselbe $\frac{Im-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x = II - a$ und aus dem letzten $v = (Im - 2)^2 - amm$. Also ist nur noch übrig, daß $xv + a$ ein Quadrat werde. Da nun $v = (II - a)\,mm - 4Im + 4$ und also $xv + a = (II - a)^2\,mm - 4(II-a)\,Im + 4II - 3a$, welches ein Quadrat seyn muß; davon setze man nun die Wurzel $(II-a)\,m - p$, wovon das Quadrat $(II-a)^2\,mm - 2(II-a)\,mp + pp$, woraus wir erhalten, $-4(II-a)\,Im + 4II - 3a = -2(II-a)\,mp + pp$ und $m = \frac{pp - 4II + 3a}{(II-a)(2p-4I)}$. Man nehme $p = 2I + q$, so wird $m = \frac{4Iq + qq + 3a}{2q(II-a)}$, wo für I und q beliebige Zahlen genommen werden können.

Wäre z. E. $a = 1$, so nehme man $I = 2$, da wird $m = \frac{4q + qq + 3}{6q}$: setzt man $q = 1$, so wird $m = \frac{4}{3}$ und $m = 2n + 1$; wir wollen aber hierbey nicht weiter stehen bleiben, sondern zur folgenden Frage fortschreiten.

235.

XV. Frage: Man verlangt drey solche Zahlen x, y und z, daß so wohl die Summe als die Differenz von je zweyen ein Quadrat werde?

Es müssen also die folgenden sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden: I. $x + y$; II. $x + z$; III. $y + z$; IV. $x - y$; V. $x - z$; VI. $y - z$. Man fange bey den drey letzten an, und setze $x - y = pp$, $x - z = qq$ und $y - z = rr$, so bekommen wir aus den beyden letzten $x = qq + z$ und $y = rr + z$, daher die erstere giebt $x - y = qq - rr = pp$, oder $qq = pp + rr$, also daß die Summe der Quadraten $pp + rr$ ein Quadrat seyn muß, nämlich qq, welches geschieht wenn $p = 2ab$ und $r = aa - bb$, denn da wird $q = aa + bb$. Wir wollen aber inzwischen die Buchstaben p, q und r beybehalten, und die drey erstern Formeln betrachten, da denn erstlich $x + y = qq + rr + 2z$; zweytens $x + z = qq + 2z$; drittens $y + z = rr + 2z$. Man setze für die erstere $qq + rr + 2z = tt$, so ist $2z = tt - qq - rr$: daher denn noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen $tt - rr = \square$ und $tt - qq = \square$, das ist $tt - (aa - bb)^2 = \square$ und $tt - (aa + bb)^2 = \square$, welche diese Gestalten annehmen, $tt - a^4 - b^4 + 2aabb$ und $tt - a^4 - b^4 - 2aabb$: weil nun sowohl $cc + dd + 2cd$ als $cc + dd - 2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man daß wir unsern Endzweck erreichen, wenn wir $tt - a^4 - b^4$ mit $cc + dd$ und $2aabb$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerkstelligen, so lasset uns setzen $cd = aa\,bb = ffgg\,hh\,kk$ und nehmen $c = ff\,gg$ und $d = hh\,kk$; $aa = ff\,hh$ und $bb = gg\,kk$ oder $a = fh$ und $b = gk$, woraus die erstere Gleichung $tt - a^4 - b^4 = cc + dd$ diese Form erhält $tt - f^4 h^4 - g^4 k^4 = f^4 g^4 + h^4 k^4$ und also $tt = f^4 g^4 + f^4 h^4 + h^4 k^4 + g^4 k^4$, das ist $tt = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4)$ welches Product also ein Quadrat seyn muß, davon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen daher die Sache auf eine andere Art angreifen, und aus den drey erstern Gleichungen $x - y = pp$;

$= pp$; $x - z = qq$; $y - z = rr$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche seyn werden $y = x - pp$ und $z = x - qq$, also daß $qq = pp + rr$. Nun werden die ersten Formeln $x + y = 2x - pp$, $x + z = 2x - qq$; und $y + z = 2x - pp - qq$; vor diese letzte setze man $2x - pp - qq = tt$, also daß $2x = tt + pp + qq$ und nur noch diese Formeln $tt + qq$ und $tt + pp$ übrig bleiben, welche zu Quadraten gemacht werden müssen. Da nun aber seyn muß $qq = pp + rr$, so setze man $q = aa + bb$, und $p = aa - bb$ so wird $r = 2ab$; woraus unsere Formeln seyn werden:

I. $tt + (aa + bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \square$ II. $tt + (aa - bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square$.

Vergleichen wir nun hier wiederum $tt + a^4 + b^4$ mit $cc + dd$, und $2aabb$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Endzweck: wir setzen demnach wie oben $c = ff gg$, $d = hhkk$ und $a = fh$, $b = gk$; so wird $cd = aabb$, und muß noch seyn $tt + f^4 h^4 + g^4 k^4 = cc + dd = f^4 g^4 + h^4 k^4$; woraus folget $tt = f^4 g^4 - f^4 h^4 + h^4 k^4 - g^4 k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4)$. Die Sache kommt also darauf an, daß zwey Differenzen zwischen zweyen Biquadraten gefunden werden, als $f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multiplicirt ein Quadrat machen.

Wir wollen zu diesem Ende die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen was für Zahlen daraus entspringen, wenn für m und n gegebene Zahlen genommen werden, und dabey die Quadraten, so darinnen enthalten sind, besonders bemerken. Weil nun $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, so wollen wir daraus folgendes Täfelgen machen.

Tabelle

Für die Zahlen, welche in der Form $m^4 - n^4$ enthalten sind.

m	nn	mm − nn	mm + nn	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3. 5
9	1	8	10	16. 5
9	4	5	13	5. 13
16	1	15	17	3. 5. 17
16	9	7	25	25. 7
25	1	24	26	16. 3. 13
25	9	16	34	16. 2. 17
49	1	48	50	25. 16. 2. 3
49	16	33	65	3. 5. 11. 13
64	1	63	65	9. 5. 7. 13
81	49	32	130	64. 5. 13
121	4	117	125	25. 9. 5. 13
121	9	112	130	16. 2. 5. 7. 13
121	49	72	170	144. 5. 17
144	25	119	169	169. 7. 17
169	1	168	170	16. 3. 5. 7. 17
169	81	88	250	25. 16. 5. 11
225	64	161	289	289. 7. 23

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben: man nehme nämlich $ff = 9$ und $kk = 4$, so wird $f^4 - k^4 = 13.5$: ferner nehme man $gg = 81$, und $hh = 49$, so wird $g^4 - h^4 = 64.5.13$, woraus $tt = 64.25.169$; folglich $t = 520$. Da nun $tt = 270400$; $f = 3$; $g = 9$; $k = 2$; $h = 7$, so bekommen wir $a = 21$; $b = 18$; hieraus $p = 117$, $q = 765$ und $r = 756$; daraus findet man $2x = tt + pp + qq = 869314$ und also $x = 434657$; daher ferner $y = x - pp = 420968$; und endlich $z = x - qq = -150568$; welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdenn die Summe in der Differenz und umgekehrt die Differenz in der Summe verwandelt werden; folglich sind unsere drey gesuchten Zahlen.

$x = 434657$
$y = 420968$
$z = 150568$

daher wird $x + y = 855625 = (925)^2$
$x + z = 585225 = (765)^2$
$y + z = 571536 = (756)^2$

und weiter $x - y = 13689 = (117)^2$
$x - z = 284089 = (533)^2$
$y - z = 270400 = (520)^2$

Noch andere Zahlen können gefunden werden aus der obigen Tabelle, wenn wir setzen $ff = 9$; $kk = 4$, und $gg = 121$, $hh = 4$; denn daraus wird $tt = 13.5.5.13.9.25. = 9.25.25.169$, also daß $t = 3.5.5.13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$: hieraus wird, $p = aa - bb = -448$, $q = aa + bb = 520$ und $r = 2ab = 264$, daher bekommen wir $2x = tt + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729$, daher $x = \frac{1421729}{2}$,

dar-

daraus $y = x - pp = \frac{107032^1}{2}$ und $z = x - qq = 880929$.

Nun ist zu merken, daß wenn diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, eben dieselben durch ein jegliches Quadrat multiplicirt, diese nämliche Eigenschaft behalten müssen. Man nehme also die gefundenen Zahlen viermal größer, so werden die drey folgenden gleichfalls ein Genüge leisten: $x = 2843458$, $y = 2040642$, und $z = 1761858$, welche größer sind als die vorhergehenden; also daß jene für die kleinsten möglichen gehalten werden können.

236.

XVI. Frage: Man verlangt drey Quadratzahlen, so daß die Differenz zwischen je zweyen ein Quadrat werde?

Die vorige Auflösung dienet uns auch um diese aufzulösen. Denn wenn x, y und z solche Zahlen sind, daß diese Formeln Quadrate werden I. $x + y$; II. $x - y$; III. $x + z$; IV. $x - z$; V. $y + z$; VI. $y - z$; so wird auch das Product aus der ersten und zweyten $xx - yy$ ein Quadrat, imgleichen auch das Product von der dritten und vierten $xx - zz$, und endlich auch das Product aus der fünften und sechsten $yy - zz$ ein Quadrat seyn, daher die drey hier gesuchten Quadrate seyn werden xx, yy und zz. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweifel weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß um $xx - yy$ zu einem Quadrat zu machen, auch $x + y$ und $x - y$ ein jedes besonders ein Quadrat seyn müsse, indem z. E. $25 - 9$ ein Quadrat ist, da doch weder $5 + 3$ noch $5 - 3$ ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Frage besonders auflösen, und zuerst bemerken, daß für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Denn wenn $xx - yy$, $xx - zz$ und $yy - zz$ Quadrate sind, so bleiben dieselben auch Quadrate, wenn sie durch zz

dividirt werden; daher diese Formeln zu Quadraten gemacht werden müssen $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \square$, $\frac{xx}{zz} - 1 = \square$, und $\frac{yy}{zz} - 1 = \square$. Also kommt die Sache nur auf diese zwey Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an; nimmt man nun $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1}$, so werden die zwey letztere Bedingungen erfüllt; denn da wird $\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$ und $\frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}$. Es ist also nur noch übrig die erste Formel zu einem Quadrat zu machen, welche ist $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} = \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1}\right)$. Hier wird nun der erste Factor $= \frac{2(pp\,qq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, der andere aber $= \frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, wovon das Product ist $\frac{4(pp\,qq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zehler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig diese Formel zu einem Quadrat zu machen (pp qq − 1) (qq − pp), oder auch diese $(pp\,qq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$; welches geschieht wenn genommen wird $pq = \frac{ff+gg}{2fg}$ und $\frac{q}{p} = \frac{hh+kk}{2hk}$, da denn ein jeder Factor besonders ein Quadrat wird.

Hier-

Hieraus ist nun $qq = \frac{ff+gg}{2fg} \cdot \frac{hh+kk}{2hk}$; folglich müssen diese zwey Brüche mit einander multiplicirt ein Quadrat ausmachen, und also auch wenn dieselben mit 4 ff gg. hh kk multiplicirt werden, das ist fg (ff + gg) hk (hh + kk); welche Formel derjenigen, so im vorigen gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wenn man setzt $f = a + b$, $g = a - b$, $h = c + d$ und $k = c - d$: denn da kommt $2(a^4 - b^4) \cdot 2(c^4 - d^4) = 4(a^4 - b^4)(c^4 - d^4)$, welches, wie wir gesehen haben geschieht, wenn $aa = 9$; $bb = 4$, $cc = 81$ und $dd = 49$, oder $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$ und $d = 7$. Hieraus wird $f = 5$; $g = 1$; $h = 16$ und $k = 2$, und daher $pq = \frac{13}{5}$ und $\frac{q}{p} = \frac{260}{24} = \frac{65}{16}$; diese zwey Gleichungen mit einander multiplicirt geben $qq = \frac{65.13}{16.5} = \frac{13.13}{16}$, folglich $q = \frac{13}{4}$, daher wird $p = \frac{4}{5}$; dadurch bekommen wir $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} = -\frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z} = -\frac{qq+1}{qq-1} = \frac{185}{153}$. Da nun $x = -\frac{41z}{9}$ und $y = \frac{185z}{153}$, so nehme man um ganze Zahlen zu bekommen $z = 153$, da wird $x = -697$ und $y = 185$, folglich sind die drey gesuchten Quadratzahlen folgende:

$xx = 485809$: denn da wird $xx - yy = 451584 = (672)^2$
$yy = 34225$; $yy - zz = 10816 = (104)^2$
$zz = 23409$; $xx - zz = 462400 = (680)^2$

welche Quadrate viel kleiner sind, als wenn wir von den in der vorigen Frage gefundenen drey Zahlen x, y und z die Quadrate hätten nehmen wollen.

237.

Man wird hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden worden, indem uns

dazu die obige Tabelle behülflich gewesen. Wir haben uns aber dieses Mittels nur bedienet, um die kleinste Auflösung zu finden: wollte man aber darauf nicht sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen gegeben werden. Da es nämlich bey der letztern Frage darauf ankommt, daß dieses Product $(pp\,qq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$ zu einem Quadrat gemacht werde, weil alsdenn seyn wird $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}$ und $\frac{y}{z}=\frac{qq+1}{qq-1}$, so setze man $\frac{q}{p}=m$ oder $q=mp$, da denn unsere Formel seyn wird $(mm\,p^4-1)(mm-1)$, welche offenbar ein Quadrat wird wenn $p=1$; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wenn wir setzen $p=1+s$, alsdenn aber muß diese Formel ein Quadrat seyn $(mm-1)$. $(mm-1+4mms+6mmss+4mms^3+mms^4)$ und also auch wenn dieselbe durch das Quadrat $(mm-1)^2$ dividirt wird, da denn herauskommt $1+\frac{4mms}{mm-1}+\frac{6mmss}{mm-1}+\frac{4mms^3}{mm-1}+\frac{mms^4}{mm-1}$. Man setze hier der Kürze halber $\frac{mm}{mm-1}=a$, also daß diese Formel $1+4as+6ass+4as^3+as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sey die Wurzel davon $1+fs+gss$ deren Quadrat ist $1+2fs+2gss+ffss+2fgs^3+ggs^4$, und man bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen, welches geschieht wenn $4a=2f$ oder $f=2a$, und $6a=2g+ff$, folglich $g=\frac{6a-ff}{2}=3a-2aa$, so geben die zwey letzten Glieder diese Gleichung $4a+as=2fg+ggs$,

woraus

woraus gefunden wird $s = \frac{4a - 2fg}{gg - a} = \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9aa - a'}$

das ist $s = \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1,}$ welcher Bruch durch a $- 1$ abgekürzt giebt $\frac{4(2a-1)}{4aa - 8a + 1.}$ Dieser Werth giebt uns schon unendlich viel Auflösungen weil die Zahl m, daraus hernach $a = \frac{mm}{mm - 1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, welches durch einige Exempel zu erläutern nöthig ist.

I. Es sey $m = 2$, so wird $a = \frac{4}{3}$ und daher $s = 4. \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{2}{9}^3} = -\frac{60}{23}$ und hieraus $p = -\frac{27}{23}$, folglich $q = -\frac{74}{23}$; endlich $\frac{x}{z} = \frac{940}{240}$ und $\frac{y}{z} = \frac{600}{940}\frac{5}{4}$.

II. Es sey $m = \frac{3}{2}$, so wird $a = \frac{9}{5}$ und $s = 4. \frac{\frac{13}{5}^3}{-\frac{11}{25}}$ $= -\frac{260}{11}$, daher $p = -\frac{249}{11}$ und $q = \frac{747}{22}$: woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerkt zu werden, wenn a ein Quadrat ist, wie geschieht wenn $m = \frac{5}{3}$ denn da wird $a = \frac{25}{16}$. Man setze wieder der Kürze halben $a = bb$, also daß unsere Formel seyn wird $1 + 4bbs + 6bbss + 4bbs^3 + bbs^4$: davon sey die Wurzel $1 + 2bbs + bss$, deren Quadrat ist $1 + 4bbs + 2bss + 4b^4ss + 4b^3s^3 + bbs^4$, wo sich die zwey ersten und die letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch ss dividirt geben $6bb + 4bbs = 2b + 4b^4 + 4b^3s$, daraus $s = \frac{6bh - 2b - 4b^4}{4b^3 - 4bb} = \frac{3b - 1 - 2h^3}{2bb - 2b}$; welcher Bruch

noch durch b − 1 abgekürzt werden kann, da denn kommt $s = \frac{1 - 2b - 2bb}{2b}$ und $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$.

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch setzen können $1 + 2bs + bss$, davon das Quadrat ist $1 + 4bs + 2bss + 4bbss + 4bbs^3 + bbs^4$, wo sich die ersten und zwey letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt geben $4bb + 6bbs = 4b + 2bs + 4bbs$. Da nun $bb = \frac{25}{16}$ und $b = \frac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s = -2$ und $p = -1$, folglich $pp - 1 = 0$: woraus nichts gefunden wird, weil $z = 0$ würde.

Im vorigen Fall aber, da $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$, wenn $m = \frac{5}{3}$ und daher $a = \frac{25}{16} = bb$, folglich $b = \frac{5}{4}$, so kommt $p = \frac{17}{20}$ und $q = mp = \frac{17}{12}$, folglich $\frac{x}{z} = \frac{689}{1189}$ und $\frac{y}{z} = \frac{433}{165}$.

238.

XVII. Frage: Man verlangt drey Quadratzahlen xx, yy und zz, so daß die Summe von je zweyen wieder ein Quadrat ausmache?

Da nun diese drey Formeln $xx + yy$; $xx + zz$ und $yy + zz$ zu Quadraten gemacht werden sollen, so theile man dieselben durch zz um die drey folgenden zu erhalten I. $\frac{xx}{zz} + \frac{yy}{zz} = \square$; II. $\frac{xx}{zz} + 1 = \square$; III. $\frac{yy}{zz} + 1 = \square$. Da denn den zwey letzteren ein Genüge geschieht, wenn $\frac{x}{z} = \frac{pp - 1}{2p}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq - 1}{2q}$, hieraus wird die erste Formel $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, welche also auch mit 4 multiplicirt ein Quadrat werden muß, das

das ist $\frac{(pp-1)^2}{pp} + \frac{(qq-1)^2}{qq}$; oder auch mit pp qq multiplicirt $qq(pp-1)^2 + pp(qq-1)^2 = \square$, welches nicht wohl geschehen kann ohne einen Fall zu wissen, da dieselbe ein Quadrat wird: allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, daher man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, wovon wir einige anführen wollen.

I. Da sich die Formel also ausdrücken läßt $qq(p+1)^2(p-1)^2 + pp(q+1)^2(q-1)^2 = \square$ so mache man, daß sich dieselbe durch das Quadrat $(p+1)^2$ theilen lasse; welches geschieht wenn man nimmt $q-1 = p+1$ oder $q = p+2$, da denn seyn wird $q+1 = p+3$, woher unsere Formel wird $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = \square$, welche durch $(p+1)^2$ dividirt ein Quadrat seyn muß, nämlich $(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2$, so in diese Form aufgelöst wird $2p^4 + 8p^3 + 6pp - 4p + 4$. Weil nun hier das letzte Glied ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $2 + fp + gpp$ oder $gpp + fp + 2$, davon das Quadrat ist $ggp^4 + 2fgp^3 + 4gpp + ffpp + 4fp + 4$ wo man f und g so bestimmen muß, daß die drey letzten Glieder wegfallen, welches geschieht wenn $-4 = 4f$, oder $f = -1$ und $6 = 4g + 1$, oder $g = \frac{5}{4}$, da denn die ersten Glieder durch p^3 dividirt geben $2p + 8 = ggp + 2fg = \frac{2}{1}\frac{5}{6}$ $p - \frac{5}{2}$, woraus gefunden wird $p = -24$ und $q = -22$; daher wir erhalten $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = -\frac{575}{48}$ oder $x = -\frac{575}{48}z$, und $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = \frac{483}{44}$ oder $y = -\frac{483}{44}z$.

Man nehme nun $z = 16.3.11$, so wird $x = 575.11$ und $y = 483.12$: daher sind die Wurzeln von den drey gesuchten Quadraten folgende:

$x = 6325 = 11.23.25$, denn hieraus wird

$xx + yy = 23^2 (275^2 + 252^2) = 23^2 . 373^2$.

$y = 5796 = 12.21.23$, dieses giebt

$xx + zz = 11^2 (575^2 + 48^2) = 11^2 . 577^2$.

$z = 528 = 3.11.16$, hieraus wird

$yy + zz = 12^2 (483^2 + 44^2) = 12^2 . 485^2$.

II. Man kann noch auf unendlich viel Arten machen, daß unsere Formel durch ein Quadrat theilbar wird; man setze z. E. $(q+1)^2 = 4(p+1)^2$ oder $q + 1 = 2(p+1)$, das ist $q = 2p + 1$ und $q - 1 = 2p$, woraus unsere Formel wird $(2p+1)^2 (p+1)^2 (p-1)^2 + pp.4.(p+1)^2$ $(4pp) = \square$, welche durch $(p+1)^2$ getheilt, giebt $(2p+1)^2 (p-1)^2 + 16p^4 = \square$ oder $20p^4 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1 = \square$, woraus aber nichts gefunden werden kann.

III. Man setze daher $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, oder $q - 1 = 2(p+1)$, so wird $q = 2p + 3$ und $q + 1 = 2p + 4$ oder $q + 1 = 2(p+2)$: woher unsere Formel durch $(p+1)^2$ getheilt seyn wird: $(2p+3)^2 (p-1)^2 + 16pp(p+2)^2$, das ist $9 - 6p + 53pp + 68p^3 + 20p^4$; davon sey die Wurzel $3 - p + gpp$, deren Quadrat ist $9 - 6p + 6gpp + pp - 2gp^3 + ggp^4$. Da nehme man nun um auch die dritten Glieder verschwinden zu machen $53 = 6g + 1$ oder $g = \frac{26}{3}$, so werden die übrigen Glieder durch p^3 dividirt geben $20p + 68 = ggp - 2g$ oder $\frac{256}{3} = \frac{496}{9} p$, daher $p = \frac{48}{31}$ und $q = \frac{1889}{31}$, woraus wiederum eine Auflösung folget.

IV. Man setze $q - 1 = \frac{4}{3}(p-1)$, so wird $q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}$ und $q + 1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p+1)$, daher wird

unsere

unsere Formel durch $(p-1)^2$ dividirt, seyn $\frac{(4p-1)^2}{9}(p+1)^2+\frac{64}{81}pp(2p+1)^2$, welche mit 81 multiplicirt, wird $9(4p-1)^2(p+1)^2+64pp(2p+1)^2=400p^4+472p^3+73pp-54p+9$, wo sowohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $20pp-9p+3$, davon das Quadrat $400p^4-360p^3+201pp+120pp-54p+9$ und daher erhält man $472p+73=-360p+201$, daher $p=\frac{2}{13}$ und $q=\frac{8}{39}-\frac{1}{3}$.

Man kann auch für die obige Wurzel setzen $20pp+9p-3$, davon das Quadrat $400p^4+360p^3-120pp+81pp-54p+9$, mit unserer Formel verglichen giebt $472p+73=360p-39$, und daraus $p=-1$, welcher Werth aber zu nichts nützet.

V. Man kann auch machen daß sich unsere Formel sogar durch beyde Quadrate $(p+1)^2$ und $(p-1)^2$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Ende $q=\frac{pt+1}{p+t}$, da wird $q+1=\frac{pt+p+t+1}{p+t}=\frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$ und $q-1=\frac{pt-p-t+1}{p+t}=\frac{(p-1)(t-1)}{p+t}$, hieraus wird nun unsere Formel durch $(p+1)^2(p-1)^2$ dividirt $=\frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2}+pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4}$, welche mit dem Quadrat $(p+t)^4$ multiplicirt noch ein Quadrat seyn muß, nämlich $(pt+1)^2(p+t)^2+pp(t+1)^2(t-1)^2$ oder $ttp^4+2t(tt+1)p^3+2ttpp+(tt+1)^2pp+(tt-1)^2pp+2t(tt+1)p+tt$,

$+tt$, wo sowohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $tpp + (tt+1)p - t$, davon das Quadrat $ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 - 2ttpp + (tt+1)^2 pp - 2t(tt+1)p + tt$ mit unserer Formel verglichen giebt:

$2ttp + (tt+1)^2 p + (tt-1)^2 p + 2t(tt+1) = -2ttp + (tt+1)^2 p - 2t(tt+1)$, oder

$4ttp + (tt-1)^2 p + 4t(tt+1) = 0$, oder

$(tt+1)^2 p + 4t(tt+1) = 0$, das ist $tt+1 = -\frac{4t}{p}$: woraus wir erhalten $p = \frac{-4t}{tt+1}$, hieraus

wird $pt + 1 = -\frac{3tt+1}{tt+1}$ und $p + t = \frac{t^3 - 3t}{tt+1}$,

folglich $q = -\frac{3tt+1}{t^3 - 3t}$, wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sey z. E. $t=2$ so wird $p = -\frac{8}{5}$ und $q = -\frac{17}{2}$: woraus wir finden $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = +\frac{39}{80}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q}$

$= -\frac{117}{476}$ oder $x = \frac{3.13}{4.4.5}z$ und $y = \frac{9.13}{4.11}z$. Man nehme nun $z = 4.4.5.11$. so wird $x = 3.13.11$ und $y = 4.5.9.13$: also sind die Wurzeln der drey gesuchten Quadraten $x = 3.11.13 = 429$; $y = 4.5.9.13 = 2340$ und $z = 4.4.5.11 = 880$. Welche noch kleiner sind als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird

$xx + yy = 3^2.13^2(121+3600) = 3^2.13^2.61^2$;

$xx + zz = 11^2.(1521+6400) = 11^2.89^2$;

$yy + zz = 20^2.(13689+1936) = 20^2.125^2$;

VI. Zuletzt bemerken wir noch bey dieser Frage, daß aus einer jeglichen Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann: denn wenn

diese

diese Werthe gefunden worden $x = a$, $y = b$, und $z = c$; also daß $aa + bb = \square$, $aa + cc = \square$ und $bb + cc = \square$, so werden auch die folgenden Werthe ein Genüge leisten, $x = ab$, $y = bc$ und $z = ac$, denn da wird $xx + yy = aabb + bbcc = bb(aa + cc) = \square$ $xx + zz = aabb + aacc = aa(bb + cc) = \square$ $yy + zz = aacc + bbcc = cc(aa + bb) = \square$. Da wir nun eben gefunden $x = a = 3.\ 11.\ 13$; $y = b = 4.\ 5.\ 9.\ 13.$ und $z = c = 4.\ 4.\ 5.\ 11$, so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$x = ab = 3.\ 4.\ 5.\ 9.\ 11.\ 13.\ 13.$
$y = bc = 4.\ 4.\ 4.\ 5.\ 5.\ 9.\ 11.\ 13.$
$y = ac = 3.\ 4.\ 4.\ 5.\ 11.\ 11.\ 13.$

welche sich alle drey durch $3.\ 4.\ 5.\ 11.\ 13$ theilen lassen, und also auf folgende Formel gebracht werden $x = 9.\ 13$, $y = 3.\ 4.\ 4.\ 5$ und $z = 4.\ 11$, das ist $x = 117$, $y = 240$, und $y = 44$, welche noch kleiner sind als die vorigen; daher wird aber:

$xx + yy = 71289 = 267^2$.
$xx + zz = 15625 = 125^2$.
$yy + zz = 59536 = 244^2$.

239.

XVIII. Frage: Man verlangt zwey Zahlen x und y, so daß wenn man die eine zum Quadrat der andern addirt ein Quadrat heraus komme, also daß diese zwey Formeln $xx + y$ und $yy + x$ Quadrate seyn sollen?

Wollte man sogleich für die erstere setzen $xx + y = pp$ und daraus herleiten $y = pp - xx$, so würde die andere Formel $p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \square$ wovon die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zugleich für beyde Formeln $xx + y = (p - x)^2 = pp - 2px + xx$ und $yy + x = (q - y)^2 = qq$

$= qq - 2qy + yy$, woraus wir denn diese zwey Gleichungen erhalten I.) $y + 2px = pp$ und II.) $x + 2qy = qq$, aus welchen x und y leicht gefunden werden können. Man findet nämlich

$x = \frac{2qpp - qq}{4pq - 1}$ und $y = \frac{2pqq - qq}{4pq - 1}$; wo man p und q nach Belieben annehmen kann. Man setze z. E. $p = 2$ und $q = 3$, so bekommt man diese zwey gesuchte Zahlen $x = \frac{1}{2}\frac{5}{3}$ und $y = \frac{3}{2}\frac{2}{3}$, denn daher wird $xx + y = \frac{2}{5}\frac{2}{2}\frac{5}{9} + \frac{3}{2}\frac{2}{3} = \frac{9}{3}\frac{6}{2}\frac{1}{9} = (\frac{3}{2}\frac{1}{3})^2$ und $yy + x = \frac{1}{3}\frac{0}{2}\frac{2}{9}\frac{4}{} + \frac{1}{2}\frac{5}{3} = \frac{1}{3}\frac{3}{2}\frac{6}{9}\frac{9}{} = (\frac{3}{2}\frac{7}{3})^2$.

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\frac{3}{1}\frac{}{1}$ und $y = \frac{1}{1}\frac{7}{1}$: weil aber eine Zahl negativ ist, so möchte man diese Auflösung nicht gelten lassen. Man setze $p = 1$ und $q = \frac{3}{2}$, so wird $x = \frac{3}{2}\frac{}{\circ}$ und $y = \frac{7}{1}\frac{}{\circ}$, denn da wird $xx + y = \frac{9}{4}\frac{}{\circ}\frac{}{\circ} + \frac{7}{1}\frac{}{\circ} = \frac{2}{4}\frac{8}{\circ}\frac{9}{\circ} = (\frac{1}{2}\frac{7}{\circ})^2$ und $yy + x = \frac{4}{1}\frac{9}{\circ}\frac{}{\circ} + \frac{3}{2}\frac{}{\circ} = \frac{6}{1}\frac{4}{\circ}\frac{}{\circ} = (\frac{8}{1}\frac{}{\circ})^2$.

240.

XIX. Frage: Zwey Zahlen zu finden deren Summe ein Quadrat und die Summe ihrer Quadraten ein Biquadrat sey.

Diese Zahlen seyn x und y und weil $xx + yy$ ein Biquadrat seyn muß, so mache man dasselbe erstlich zu einem Quadrat, welches geschieht wenn $x = pp - qq$ und $y = 2pq$, da denn wird $xx + yy = (pp + qq)^2$. Damit nun dieses ein Biquadrat werde, so muß $pp + qq$ ein Quadrat seyn, daher setze man ferner $p = rr - ss$ und $q = 2rs$, so wird $pp + qq = (rr + ss)^2$; folglich $xx + yy = (rr + ss)^4$ und also ein Biquadrat; alsdenn aber wird $x = r^4 - 6rrss + s^4$ und $y = 4r^3s - 4rs^3$. Also ist noch übrig, daß diese Formel $x + y = r^4 + 4r^3s - 6rrss - 4rs^3 + s^4$ ein Quadrat werde, man setze davon die Wurzel $rr + 2rs + ss$, und also unsere Formel gleich

diesem

diesem Quadrat $r^4 + 4r^3s + 6rrss + 4rs^3 + s^4$, wo sich die zwey ersten und letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch rss dividirt geben $6r + 4s =$ $-6r - 4s$ oder $12r + 8s = 0$: also $s = -\frac{12r}{8} = -\frac{3}{2}r$, oder man kann die Wurzel auch setzen $rr - 2rs + ss$, damit die vierten Glieder wegfallen: da nun das Quadrat hievon ist $r^4 - 4r^3s + 6rrss - 4rs^3 + s^4$, so geben die übrigen Glieder durch rrs dividirt $4r - 6s =$ $-4r + 6s$, oder $8r = 12s$, folglich $r = \frac{3}{2}s$: wenn nun $r = 3$ und $s = 2$ so würde $x = -119$ negativ.

Laßt uns ferner setzen $r = \frac{3}{2}s + t$, so wird für unsere Formel:

$rr = \frac{9}{4}ss + 3st + tt$, $r^3 = \frac{27}{8}s^3 + \frac{27}{4}sst + \frac{9}{2}stt + t^3$

---

folglich $r^4 = \frac{81}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{27}{2}sstt + 6st^3 + t^4$

$+ 4r^3s = \frac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18sstt + 4st^3$

$-6rrss = -\frac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6sstt$

$-4rs^3 = -6s^4 - 4s^3t$

$+s^4 = +s^4$; also unsere Formel

$\frac{1}{16}s^4 + \frac{3}{2}s^3t + \frac{51}{2}sstt + 10st^3 + t^4$

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch wenn sie mit 16 multiplicirt wird: da bekommt man diese $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4$; hievon setze man die Wurzel $ss + 148st - 4tt$, davon das Quadrat ist $s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4$. Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber durch stt dividirt geben $21896s - 1184t$ $= 408s + 160t$ und also $\frac{s}{t} = \frac{1344}{1468} = \frac{336}{367} = \frac{84}{91}$.

Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$ folglich $r = 1469$: und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir, $x = r^4 - 6rrss + s^4 = 456548602776 1$ und $y = 1061652293520$.

Capitel

Capitel 15.

Auflösung solcher Fragen worzu Cubi erfordert werden.

241.

In dem vorigen Capitel sind solche Fragen vorgekommen, wo gewisse Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, da wir denn Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist noch übrig solche Fragen zu betrachten, wo gewisse Formeln zu Cubis gemacht werden sollen, dazu auch schon im vorigen Capitel die Regeln gegeben worden, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Fragen in ein größeres Licht gesetzt werden.

242.

I. Frage: Man verlangt zwey Cubos x^3 und y^3 deren Summe wiederum ein Cubus seyn soll?

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel durch den Cubus y^3 dividirt noch ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3} + 1 = \text{Cubo}$. Man setze $\frac{x}{y} = z - 1$ so bekommen wir $z^3 - 3zz + 3z$, welche ein Cubus seyn soll; wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubicwurzel setzen $z - u$, wovon der Cubus ist $z^3 - 3uzz + 3uuz - u^3$, und u so bestimmen, daß auch die zweyten Glieder wegfielen, so würde $u = 1$, die übrigen Glieder aber würden geben $3z = 3uu\,z - u^3 = 3z - 1$, woraus gefunden wird z gleich unendlich, welcher

welcher Werth uns nichts hilft. Man lasse aber u unbestimmt, so bekommen wir diese Gleichung: $-3zz+3z=-3uzz+3uuz-u^3$; aus welcher quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde: wir bekommen aber $3uzz-3zz=3uuz-3z-u^3$ das ist $=3(u-1)zz=3(uu-1)z-u^3$, oder

$$zz=(u+1)z-\frac{u^3}{3(u-1)},$$ woraus gefunden wird

$$z=\frac{u+1}{2}\pm r\left(\frac{uu+2u+1}{4}-\frac{u^3}{3(u-1)}\right)$$ oder

$$z=\frac{u+1}{2}\pm r\,\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}.$$

Die Sache kommt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrat gemacht werde, wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$ multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nämlich $\frac{-3u^4+12u^3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, wovon also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat, setzt man aber nach der Regel die Wurzel davon $guu+fu+3$, wovon das Quadrat ist $ggu^4+2fgu^3+6guu+2fu+ffuu+9$ und macht die drey letzten Glieder verschwinden, so wird erstlich $0=2f$ das ist $f=0$, und hernach $6g+ff=-18$, und daher $g=-3$: alsdenn geben die zwey ersten Glieder durch u^3 dividirt $-3u+12=ggu+2fu=9u$; und daher $u=1$, welcher Werth zu nichts führet. Wollen wir nun weiter setzen $u=1+t$, so wird unsere Formel $-12t-3t^4$, welche ein Quadrat seyn soll, welches nicht geschehen kann, wofern t nicht negativ ist. Es sey also $t=-s$, so wird unsere Formel $12s-3s^4$, welche in dem Fall $s=1$ ein Quadrat

drat wird, alsdenn aber wäre $t = -1$ und $u = 0$, woraus nichts gefunden werden kann. Man mag auch die Sache angreifen wie man will, so wird man niemals einen solchen Werth finden, der uns zu unserm Endzweck führet; woraus man schon ziemlich sicher schließen kann, daß es nicht möglich sey zwey Cubos zu finden, deren Summe ein Cubus wäre, welches aber auch folgender Gestalt bewiesen werden kann.

243.

Lehrsatz: Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß wenn die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müsse. Denn wenn es unmöglich ist daß $x^3 + y^3 = z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3 - y^3 = x^3$, nun aber ist $z^3 - y^3$ die Differenz von zwey Cubis: Es ist also genug die Unmöglichkeit bloß von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind. Denn wenn sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum desselben theilen lassen. Wäre z. E. $x = 2a$, und $y = 2b$ so würde $x^3 + y^3 = 8a^3 + 8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch $a^3 + b^3$ ein Cubus seyn.

II. Da nun u und y keinen gemeinen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerade, oder die eine gerade, und die andere ungerade. Im erstern Fall müßte z gerade seyn; im andern Fall aber müßte z ungerade seyn. Also

sind

sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerade und eine gerade. Wir wollen daher zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wenn die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyn demnach x und y zwey ungerade Zahlen, so wird sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn. Man setze daher $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß; daher aber wird $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p(pp + 3qq)$: es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q(qq + 3pp)$, welche Formel der vorigen ganz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, daher es genug ist die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp + 3qq)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(pp + 3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerade und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine ganze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nämlich $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$. Weil nun von den

Zahlen p und q die eine gerade, die andere aber ungerade ist, so wird $pp + 3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget daß sich p durch 4 theilen lassen müsse und also $\frac{p}{4}$ eine ganze Zahl sey.

V. Wenn nun dieses Product $\frac{p}{4}.(pp + 3qq)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nämlich $\frac{p}{4}$ und $pp + 3qq$, ein Cubus seyn, so nämlich dieselben keinen gemeinen Theiler haben. Denn wenn ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar sind ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn: wenn dieselben aber einen gemeinen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren p und $pp + 3qq$ nicht einen gemeinen Factor haben könnten? welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinen Theiler, so würden auch diese pp und $pp + 3qq$ eben denselben gemeinen Theiler haben, und also auch dieser ihre Differenz, welche ist $3qq$, mit dem pp eben denselben gemeinen Theiler haben, da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen pp und $3qq$ keinen andern gemeinen Theiler haben als 3, welches geschieht wenn sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben daher zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wenn die Factoren p und $pp + 3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, welches immer geschieht,

geschieht, wenn sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wenn dieselben einen gemeinen Theiler haben, welches geschieht wenn sich p durch 3 theilen läßt, da denn beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müssen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden ins besondere führen muß.

VII. Erster Fall: Es sey demnach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $pp + 3qq$ untheilbar unter sich, so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns daher $pp + 3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wenn man, wie oben gezeigt worden, setzt $p + q\sqrt{-3} = (t + u\sqrt{-3})^3$ und $p - q\sqrt{-3} = (t - u\sqrt{-3})^3$. Damit dadurch werde $pp + 3qq = (tt + 3uu)^3$ und also ein Cubus; hieraus aber wird, $p = t^3 - 9tuu = t(tt - 9uu)$, und $q = 3ttu - 3u^3 = 3u(tt - uu)$: weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerade, t aber gerade seyn, weil sonst $tt - uu$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $pp + 3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden $p = t(tt - 9uu) = t(t + 3u)(t - 3u)$, so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$, ein Cubus seyn; daher diese Formel $2t(t + 3u)(t - 3u)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemerken, daß t erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonst auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist: also sind diese drey Fa-

ctoren $2t$, $t+3u$ und $t-3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze daher $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$ so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 und g^3 deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbar ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3. Denn nachdem wir gesetzt haben $x=p+q$ und $y=p-q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müssen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.

IX. Wenn es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleinern Zahlen eben dergleichen anzeigen deren Summe auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewiß nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir sogleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p=3r$ so wird unsere Formel $\frac{3r}{4}$. $(9rr+3qq)$, oder $\frac{3}{4}r\,(3rr+qq)$, welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3rr+qq$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben sowohl gerade seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3rr+qq$ oder $qq+3rr$ zu einem Cubo, so finden wir wie oben $q=t\,(tt-9uu)$ und $r=3u\,(tt-uu)$: wo zu merken,

merken, daß weil q ungerade war, hier auch t ungerade, u aber eine gerade Zahl seyn müsse.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$ das ist $2u(tt-uu) = 2u(t+u)(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte: wenn man aber setzt $t+u = f^3$ und $t-u = g^3$, so folgt daraus $2u = f^3 - g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre: denn man darf nur setzen $f^3 - g^3 = h^3$, so wird $f^3 = h^3 + g^3$, und also hätte man zwey Cubos deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätiget, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.

244.

Weil es nun nicht möglich ist zwey solche Cubos zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fällt auch unsere erste Frage weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit dieser Frage zu machen, wie drey Cubi gefunden werden sollen, deren Summe einen Cubus ausmache: man kann aber zwey von denselben nach Belieben annehmen, also daß nur der

dritte gefunden werden soll; welche Frage wir anjetzo vornehmen wollen.

245.

II. Frage: Es wird zu zwey gegebenen Cubis a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 verlangt, welcher mit denselben zusammen wiederum einen Cubum ausmache?

Es soll also diese Formel $a^3 + b^3 + x^3$ ein Cubus werden, welches da es nicht anders geschehen kann, als wenn schon ein Fall bekannt ist, ein solcher Fall aber hier sich von selbst darbiethet nämlich $x = -a$, so setze man $x = y - a$, da wird $x^3 = y^3 - 3ayy + 3aay - a^3$, und daher unsere Formel die ein Cubus werden soll $y^3 - 3ayy + 3aay + b^3$, wovon das erste und letzte Glied schon ein Cubus ist, daher man sogleich zwey Auflösungen finden kann.

I. Nach der ersten setze man die Wurzel davon $y + b$, deren Cubus ist $y^3 + 3byy + 3bby + b^3$; woraus wir bekommen $-3ay + 3aa = 3by + 3bb$, daher $y = \frac{aa - bb}{a + b} = a - b$; folglich $x = -b$ welcher uns zu nichts dienet.

II. Man kann aber die Wurzel auch setzen $b + fy$, davon der Cubus ist $f^3y^3 + 3bffyy + 3bbfy + b^3$; und f also bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen, welches geschieht wenn $3aa = 3bbf$ oder $f = \frac{aa}{bb}$, da denn die zwey ersten Glieder durch yy dividirt geben $y - 3a = f^3y + 3bff = \frac{a^6y}{b^6} + \frac{3a^4}{b^3}$, welche mit b^6 multiplicirt, giebt $b^6y - 3ab^6 = a^6y + 3a^4b^3$;

daraus

daraus gefunden wird $y = \frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6} = \frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6}$

$= \frac{3ab^3}{b^3-a^3}$ und also $x = y - a = \frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3} = a.\frac{2b^3+a^3}{b^3-a^3}$.

Wenn also die beyden Cubi a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubi gefunden, und damit dieselbe positiv werde, so darf man nur b^3 für den größern Cubum annehmen, welches wir durch einige Exempel erläutern wollen.

I. Es seyn die zwey gegebenen Cubi 1 und 8, also daß $a = 1$ und $b = 2$, so wird diese Form $9 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{1}{7}$; denn da wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = (\frac{20}{7})^3$.

II. Es seyn die zwey gegebenen Cubi 8 und 27, also daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird diese Form $35 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seyn die zwey gegebenen Cubi 27 und 64, also daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird diese Form $91 + x^3$ ein Cubus, wenn $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwey gegebenen Cubis noch mehr dergleichen dritte finden, so müßte man in der ersten Form $a^3 + b^3 + x^3$ ferner setzen $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$, da man denn wieder auf eine ähnliche Formel kommen würde, woraus sich neue Werthe für z bestimmen ließen, welches aber in allzuweitläuftige Rechnungen führen würde.

246.

Bey dieser Frage ereignet sich aber ein merkwürdiger Fall, wenn die beyden gegebenen Cubi einander gleich sind, oder $b = a$: denn da bekommen wir $x = \frac{3a^4}{0}$, das ist unendlich, und erhalten also keine Auf-

lösung: daher diese Frage wenn $2a^3 + x^3$ ein Cubus werden soll, noch nicht hat aufgelöst werden können. Es sey z. E. $a=1$ und also unsere Formel $2 + x^3$, so ist zu merken, daß was man auch immer vor Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergebens sind, und nimmer daraus ein geschickter Werth für x gefunden werden kann; woraus sich schon ziemlich sicher schließen läßt, daß zu einem doppelten Cubo kein Cubus gefunden werden könne, welcher mit jenem zusammen einen Cubum ausmachte, oder daß diese Gleichung $2a^3 + x^3 = y^3$ unmöglich sey; aus derselben aber folget diese $2a^3 = y^3 - x^3$, und daher auch nicht möglich ist zwey Cubos zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe zweyer Cubus zu verstehen, und folgender Gestalt bewiesen werden kann.

247.

Lehrsatz. Weder die Summe, noch die Differenz zwischen zwey Cubis kann jemals einem doppelten Cubo gleich werden, oder diese Formel $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer dem Fall $y = x$, welcher für sich klar ist.

Hier können wieder x und y als untheilbar unter sich angenommen werden, denn wenn sie einen gemeinen Theiler hätten, so müßte auch z dadurch theilbar seyn, und also die ganze Gleichung durch den Cubum davon getheilt werden können. Weil nun $x^3 \pm y^3$ eine gerade Zahl seyn soll, so müssen beyde Zahlen x und y ungerade seyn, daher sowohl ihre Summe als Differenz gerade seyn wird. Man setze also $\frac{x+y}{2} = p$ und $\frac{x-y}{2} = q$, so wird $x = p + q$ und $y = p - q$; da denn

von

von den Zahlen p und q die eine gerade die andere aber ungerade seyn muß. Hieraus folgt aber $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pqq = 2p(pp + 3qq)$, und $x^3 - y^3 = 6ppq + 2q^3 = 2q(3pp + qq)$, welche beyde Formeln einander völlig ähnlich sind. Daher es genug seyn wird zu zeigen, daß diese Formel $2p(pp + 3qq)$ kein doppelter Cubus, und also diese $p(pp + 3qq)$ kein Cubus seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen enthalten ist.

I. Hier kommen wieder zwey Fälle zu betrachten vor, davon der erste ist, wenn die zwey Factoren p und $pp + 3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, da denn ein jeder für sich ein Cubus seyn muß; der andere Fall aber ist, wenn dieselben einen gemeinen Theiler haben, welcher wie wir oben gesehen kein anderer seyn kann als 3.

II. Erster Fall. Es sey demnach p nicht theilbar durch 3, und also die beyden Factores unter sich untheilbar, so mache man erstlich $pp + 3qq$ zu einem Cubo, welches geschieht, wenn $p = t(tt - 9uu)$ und $q = 3u(tt - uu)$, also daß noch der Werth von p ein Cubus seyn müßte. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonst p auch durch 3 theilbar seyn würde, so sind diese zwey Factoren t und $tt - 9uu$ untheilbar unter sich, und muß folglich ein jeder für sich ein Cubus seyn.

III. Der letztere aber hat wieder zwey Factores, nämlich $t + 3u$ und $t - 3u$, welche unter sich untheilbar sind, erstlich weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, hernach aber weil von den Zahlen t und u die eine gerade und die andere ungerade ist. Denn wenn beyde ungerade wären, so würde nicht nur p sondern auch q ungerade werden, welches nicht seyn kann, folglich muß auch ein je-

der von diesen Factoren $t + 3u$ und $t - 3u$ für sich ein Cubus seyn.

IV. Man setze daher $t + 3u = f^3$ und $t - 3u = g^3$, so wird $2t = f^3 + g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus, welcher sey $= h^3$, also daß $f^3 + g^3 = 2h^3$ wäre, das ist wir hätten zwey weit kleinere Cubos nämlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze demnach $p = 3r$, so wird unsere Formel $3r(9rr + 3qq) = 9r(3rr + qq)$, welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und daher ein jeder ein Cubus seyn muß.

VI. Um nun den letzteren $qq + 3rr$ zu einem Cubo zu machen, so setze man $q = t(tt - 9uu)$ und $r = 3u(tt - uu)$, da denn wieder von den Zahlen t und u die eine gerade, die andere aber ungerade seyn muß, weil sonst die beyde Zahlen q und r gerade würden. Hieraus aber bekommen wir den erstern Factor $9r = 27u(tt - uu)$, welcher ein Cubus seyn müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nämlich $u(tt - uu)$ das ist $u(t + u)(t - u)$.

VII. Weil nun auch diese drey Factoren unter sich untheilbar sind, so muß ein jeder für sich ein Cubus seyn. Setzt man demnach für die beyden letztern $t + u = f^3$ und $t - u = g^3$, so bekommt man $2u = f^3 - g^3$: weil nun auch u ein Cubus seyn muß, so erhalten wir in weit kleinern Zahlen zwey Cubos f^3 und g^3, deren Differenz gleichfalls ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine dergleichen Cubos giebt, deren Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man

IX. Man könnte zwar einwenden, daß da es in kleinern Zahlen gleichwohl einen solchen Fall gebe, nämlich wenn $f = g$, der obige Schluß betriegen könnte. Allein wenn $f = g$ wäre, so hätte man in dem erstern Fall $t + 3u = t - 3u$ und also $u = 0$, folglich wäre auch $q = 0$, und da wir gesetzt hatten $x = p + q$ und $y = p - q$, so wären auch die zwey ersten Cubi x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen worden. Eben so auch in dem andern Fall, wenn $f = g$ wäre, so müßte seyn $t + u = t - u$ und also wiederum $u = 0$, daher auch $r = 0$ und folglich $p = 0$, da denn wiederum die beyden erstern Cubi x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber keinesweges die Frage ist.

248.

III. Frage: Man verlangt auf eine allgemeine Art drey Cubos x^3, y^3, und z^3, deren Summe wiederum einen Cubum ausmache?

Wir haben schon gesehen, daß man zwey von diesen Cubis für bekannt annehmen, und daraus immer den dritten bestimmen könne, wenn nur die beyden erstern einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in einem jeden Fall nur einen Werth für den dritten Cubum und es würde sehr schwer fallen, daraus noch mehrere ausfindig zu machen.

Wir sehen also hier alle drey Cubos als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, setzen wir $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, und bringen den einen von den erstern auf die andere Seite, damit wir bekommen $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$; welcher Gleichung folgender Gestalt ein Genügen geschehen kann.

I. Man setze $x = p + q$ und $y = p - q$, so wird, wie wir gesehen $x^3 + y^3 = 2p(pp + 3qq)$: ferner setze man $v = r + s$ und $z = r - s$, so wird

$v^3 -$

$v^3 - z^3 = 2s(ss + 3rr)$; daher denn seyn muß
$2p(pp + 3qq) = 2s(ss + 3rr)$, oder
$p(pp + 3qq) = s(ss + 3rr)$.

II. Wir haben oben gesehen, daß eine solche Zahl $pp + 3qq$ keine andere Theiler habe, als welche selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun diese beyde Formeln $pp + 3qq$ und $ss + 3rr$ nothwendig einen gemeinen Theiler haben müssen, so sey derselbe $= tt + 3uu$.

III. Zu diesem Ende setze man
$pp + 3qq = (ff + 3gg)(tt + 3uu)$ und
$ss + 3rr = (hh + 3kk)(tt + 3uu)$: da denn
$p = ft + 3gu$ und $q = gt - fu$ wird:
folglich $pp = fftt + 6fgtu + 9gguu$ und
$qq = ggtt - 2fgtu + ffuu$; hieraus
$pp + 3qq = (ff + 3gg)tt + (3ff + 9gg)uu$ das
ist $pp + 3qq = (ff + 3gg)(tt + 3uu)$.

IV. Eben so erhalten wir aus der andern Formel
$s = ht + 3ku$ und $r = kt - hu$,
woraus diese Gleichung entspringt
$(ft + 3gu)(ff + 3gg)(tt + 3uu) =$
$(ht + 3ku)(hh + 3kk)(tt + 3uu)$,
welche durch $tt + 3uu$ dividirt giebt $ft(ff + 3gg) + 3gu(ff + 3gg) = ht(hh + 3kk) + 3ku(hh + 3kk)$, oder $ft(ff + 3gg) - ht(hh + 3kk) = 3ku(hh + 3kk) - 3gu(ff + 3gg)$, woraus wir erhalten $t = \frac{3k(hh + 3kk) - 3g(ff + 3gg)}{f(ff + gg) - h(hh + 3kk)}u$.

V. Um nun ganze Zahlen zu bekommen, so nehme man $u = f(ff + 3gg) - h(hh + 3kk)$, damit sey $t = 3k(hh + 3kk) - 3g(ff + 3gg)$, wo man die vier Buchstaben f, g, h, und k nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für t und u gefunden, so erhält man daraus:

I.) p.

I.) $p = ft + 3gu$, II.) $q = gt - fu$, III.) $s = ht + 3ku$, IV.) $r = kt - hu$, und hieraus endlich für die Auflösung unserer Frage $x = p + q$, $y = p - q$, $z = r - s$, und $v = r + s$, welche Auflösung so allgemein ist, daß darinnen alle mögliche Fälle enthalten sind, weil in dieser ganzen Rechnung keine willkührliche Einschränkung gemacht worden.

Der ganze Kunstgriff bestehet darinn, daß unsere Gleichung durch $tt + 3uu$ theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben t und u durch eine einfache Gleichung haben bestimmt werden können. Die Anwendung dieser Formeln kann auf unendlich vielerley Art angestellet werden, wovon wir einige Exempel anführen wollen.

I. Es sey $k = 0$ und $h = 1$, so wird $t = -3g(ff + 3gg)$ und $u = s(ff + 3gg) - 1$; hieraus also $p = -3fg(ff + 3gg) + 3fg(ff + 3gg) - 3g = -3g$, $q = -(ff + 3gg)^2 + f$, ferner $s = -3g(ff + 3gg)$ und $r = -f(ff + 3gg) + 1$, woraus wir endlich bekommen $x = -3g - (ff + 3gg)^2 + f$, $y = -3g + (ff + 3gg)^2 - f$, $z = (3g - f)(ff + 3gg) + 1$ und endlich $v = -(3g + f)(ff + 3gg) + 1$. Laßt uns nun setzen $f = -1$ und $g = +1$, so bekommen wir $x = -20$, $y = 14$, $z = 17$ und $v = -7$; daher haben wir diese Gleichung $-20^3 + 14^3 + 17^3 = -7^3$ oder $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II. Es sey $f = 2$, $g = 1$ und also $ff + 3gg = 7$; ferner $h = 0$ und $k = 1$, also $hh + 3kk = 3$, so wird seyn $t = -12$ und $u = 14$: hieraus wird $p = 2t + 3u = 18$, $q = t - 2u = -40$, $r = t = -12$ und $s = 3u = 42$; daher wir bekommen $x = p + q = -22$, $y = p - q = 58$, $z = r - s = -54$ und $v = r + s = 30$; also daß $-22^3 + 58^3 - 54^3 = 30^3$,

oder

oder $58^3 = 30^3 + 54^3 + 22^3$. Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen lassen, so wird auch seyn $29^3 = 15^3 + 27^3 + 11^3$.

III. Es sey $f = 3$, $g = 1$, $h = 1$ und $k = 1$, also $ff + 3gg = 12$ und $hh + 3kk = 4$, so wird $t = -24$ und $u = 32$, welche sich durch 8 theilen lassen; und da es hier nur auf ihre Verhältnisse ankommt, so wollen wir setzen $t = -3$ und $u = 4$. Hieraus bekommen wir $p = 3t + 3u = +3$, $q = t - 3u = -15$, $r = t - u = -7$ und $s = t + 3u = +9$: hieraus wird $x = -12$ und $y = 18$, $z = -16$ und $v = 2$, also daß $-12^3 + 18^3 - 16^3 = 2^3$ oder $18^3 = 16^3 + 12^3 + 2^3$: oder auch durch 2 abgekürzt $9^3 = 8^3 + 6^3 + 1^3$.

IV. Laßt uns setzen $g = 0$ und $k = h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Da wird nun $ff + 3gg = ff$ und $hh + 3kk = 4hh$; also bekommen wir $t = 12h^3$ und $u = f^3 - 4h^3$; daher ferner $p = st = 12fh^3$, $q = -f^4 + 4fh^3$, $r = 12h^4 - hf^3 + 4h^4 = 16h^4 - hf^3$ und $s = 3hf^3$, daraus endlich $x = p + q = 16fh^3 - f^4$, $y = p - q = 8fh^3 + f^4$, $z = r - s = 16h^4 - 4hf^3$, und $v = r + s = 16h^4 + 2hf^3$. Nehmen wir nun $f = h = 1$, so erhalten wir $x = 15$, $y = 9$, $z = 12$, und $v = 18$, welche durch 3 abgekürzt geben $x = 5$, $y = 3$, $z = 4$, und $v = 6$, also daß $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Hierbey ist merkwürdig, daß diese drey Wurzeln 3, 4, 5, um Eins steigen, daher wir untersuchen wollen, ob es noch mehr dergleichen gebe?

249.

IV. Frage: Man verlangt drey Zahlen in einer Arithmetischen Progression, deren Differenz $= 1$, also daß die Cubi derselben Zahlen zusammen addirt, wieder einen Cubum hervorbringen?

Es

Es sey x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $= x - 1$ und die größere $= x + 1$: die Cubi derselben addirt geben nun $3x^3 + 6x = 3x(xx + 2)$, welches ein Cubus seyn soll. Hierzu ist nun nöthig, daß ein Fall bekannt sey, wo dieses geschieht, und nach einigem probiren findet man $x = 4$, daher setzen wir nach den oben gegebenen Regeln $x = 4 + y$, so wird $xx = 16 + 8y + yy$ und $x^3 = 64 + 48y + 12yy + y^3$, woraus unsere Formel wird $216 + 150y + 36yy + 3y^3$, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze demnach die Wurzel $6 + fy$ und mache daß die beyden ersten Glieder wegfallen: da nun der Cubus davon ist $216 + 108fy + 18ffyy + f^3y^3$, so muß seyn $150 = 108f$, also $f = \frac{2}{1}\frac{5}{8}$. Die übrigen Glieder aber durch yy dividirt geben $36 + 3y = 18ff + f^3y = \frac{25^2}{18^2} + \frac{25^3}{18^3}y$, oder $18^3 \cdot 36 + 18^3 \cdot 3y = 18^2 \cdot 25^2 + 25^3 y$ oder $18^3 \cdot 36 - 18^2 \cdot 25^2 = 25^3 y - 18^3 \cdot 3y$, daher $y = \frac{18^3 \cdot 36 - 18^2 \cdot 25^2}{25^3 - 3 \cdot 18^3}$

$= \frac{18^2(18 \cdot 36 - 25^2)}{25^3 - 3 \cdot 18^2}$, und also $y = -\frac{324 \cdot 23}{1871} = -\frac{7}{1}\frac{4}{8}\frac{5}{7}\frac{2}{1}$; folglich $x = \frac{3}{1}\frac{2}{8}\frac{1}{7}\frac{1}{1}$.

Da es beschwerlich scheinen möchte diese Reduction zu einem Cubo weiter zu verfolgen, so ist zu merken, daß die Frage immer könne auf Quadrate gebracht werden. Denn da $3x(xx + 2)$ ein Cubus seyn soll, so setze man denselben $= x^3y^3$, da man denn erhält $3xx + 6 = xxy^3$ und also $xx = \frac{6}{y^3 - 3} = \frac{36}{6y^3 - 18}$. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig, den Nenner $6y^3 - 18$ zu einem Quadrat zu machen; wozu wiederum nöthig ist einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen

lassen.

lassen. Man setze deswegen $y = 3z$, so wird unser Nenner $= 162z^3 - 18$, welcher durch 9 dividirt, nämlich $18z^3$ 2, noch ein Quadrat seyn muß. Dieses geschieht nun offenbar wenn $z = 1$; man setze daher $z = 1 + v$, so muß seyn $16 + 54v + 54vv + 18v^3 = \square$. Davon setze man die Wurzel $4 + \frac{2}{4}^{7}v$, deren Quadrat ist 16 $+ 54v + {}^{7}\frac{2}{1}\frac{9}{6}vv$, und also $54 + 18v = {}^{7}\frac{2}{1}\frac{9}{6}$: oder $18v = -{}^{1}\frac{3}{1}\frac{5}{6}$, folglich $2v = -\frac{1}{1}\frac{5}{6}$, und $v = -\frac{1}{3}\frac{5}{2}$, hieraus erhalten wir $z = 1 + v = \frac{1}{3}\frac{7}{2}$: ferner $y = \frac{5}{3}\frac{1}{2}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrachten, welcher war $6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9(18z^3 - 2)$. Von diesem Factor aber $18z^3 - 2$ haben wir die Quadratwurzel $4 + \frac{2}{4}^{7}v = \frac{1}{1}\frac{0}{2}\frac{7}{8}$, also die Quadratwurzel aus dem ganzen Nenner ist $\frac{3}{1}\frac{2}{2}\frac{1}{8}$: aus dem Zähler aber ist derselbe $= 6$, woraus folget $x = \frac{6}{\frac{3}{1}\frac{2}{2}\frac{1}{8}} = \frac{2}{1}\frac{5}{0}\frac{6}{7}$, welcher Werth von dem vorher gefundenen ganz unterschieden ist. Also sind die Wurzeln von unsern drey Cubis folgende: I.) $x - 1 = \frac{1}{1}\frac{4}{0}\frac{9}{7}$; II.) $x = \frac{2}{1}\frac{5}{0}\frac{6}{7}$; III.) $x + 1 = \frac{3}{1}\frac{6}{0}\frac{3}{7}$, deren Cubi zusammen addirt einen Cubum hervorbringen, davon die Wurzel seyn wird $xy = \frac{2}{1}\frac{5}{0}\frac{6}{7} \cdot \frac{6}{3}\frac{1}{2} = \frac{4}{1}\frac{0}{0}\frac{8}{7}$.

250.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt von der unbestimmten Analytic beschließen, weil wir bey den angebrachten Fragen Gelegenheit genug gefunden haben die vornehmsten Kunstgriffe zu erklären, welche bisher in dieser Wissenschaft sind gebraucht worden.

Ende des zweyten Theils.

BIBLIOTECA POSSOM

40
12
1
80
10
48
480
60

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euler, Leonhard, 1707-1783 / Lagrange, Joseph Louis de, 1736-1813 / Kausler, Christoph Friedrich, 1760-1825

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur Algebra

Bd.: 2

St. Petersburg 1771

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/GL 34-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11341053-5
VD18 80241298-001